1 – الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة

1- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.

2- استعمال خواص مرافق عدد مركب.

3- حساب الطويلة و عمدة لعدد مركب.

4- الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي و العكس.

5- التعبير عن خواص الأشكال الهندسية باستعمال الأعداد المركبة.

6- توظيف خواص الطويلة و العمدة لحل المسائل في الأعداد المركبة والهندسة.

7- توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة و في الهندسة.

8- حل معادلة من الدرجة الثانية و معادلات تؤول إلى الدرجة الثانية.

9- تعيين الكتابة المركبة للتحويلات النقطية المألوفة.

10- التعرف على تحويل انطلاقا من كتابته المركبة.

11- توظيف الأعداد المركبة في التحويلات النقطية.

تصميم الدرس

تعريف

أنشطة

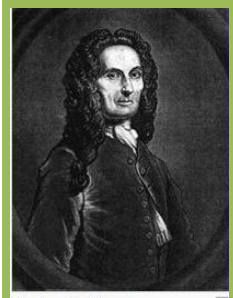
الدرس

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

تمـــاريـــن و مشكـــــلات

الحـــلـــــــــــول

تعريف:


Abraham de Moivre

ابراهام دي موافر: ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م.

ابراهام دي موافر من أصدقاء إسحاق نيوتن ، حيث نشر مساهماته في الاحتمل ضمن كتابه في المصادفة(مبدأ الفرص) في سنة 1707م اكتشف ابراهام دي موافر دستوره الشهير:

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

أنــشــطـــــة:

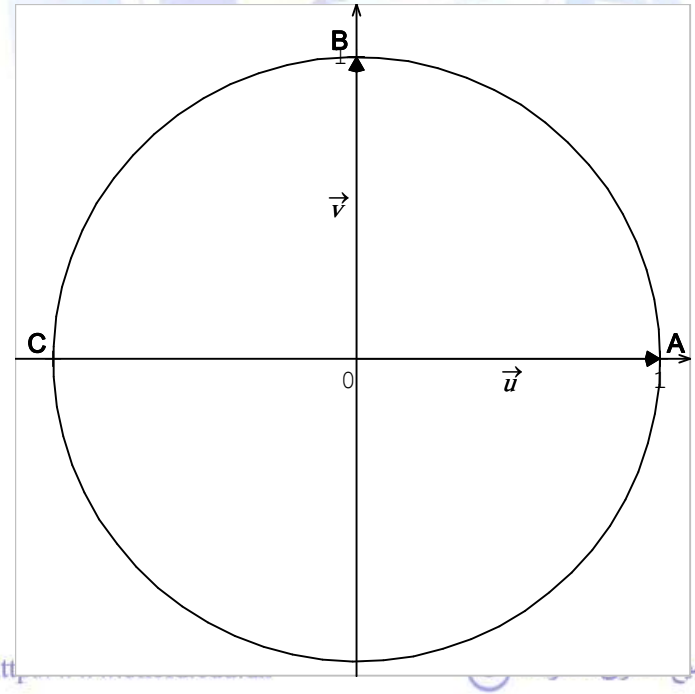
النشاط1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1- نعتبر في هذا السؤال الاشعة $\overrightarrow{OM}$ من المستوي المرتبطة خطيا مع الشعاع $\vec{u}$ و التي إحداثياها الديكارتية الثنائية $\left(x;0\right)$ حيث x عدد حقيقي .

لتكن الدالة φ المعرفة كما يلي : $\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)=x$

أ) عين: $\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{OC}\right)$, $\varphi\left(3\overrightarrow{OA}\right)$, $\varphi\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$ و $\varphi\left(5\vec{u}\right)$.



ب) بين أنه إذا كان $\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)=x$ و $\varphi\left(\overrightarrow{OM'}\right)=x'$ فإن للدالة φ الخاصيتين التاليتين : $\varphi\left(k.\overrightarrow{OM}\right)=k\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$ و $\varphi\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{OM'}\right)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي k .

2- ليكن الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

بفرض أنه إذا كانت N صورة M بالدوران r فإن:

$\varphi\left(\overrightarrow{ON}\right)=i\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$ حيث i عدد جديد غير حقيقي .

أ) عين: $\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)$, $\varphi\left(3\overrightarrow{OB}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, $\varphi\left(5\vec{v}\right)$ و $\varphi\left(3\vec{u}-5\vec{v}\right)$.

ب) إذا اعتبرنا أن C هي صورة B بالدوران r, عين $\varphi\left(\overrightarrow{OC}\right)$ ثم قارن مع نتائج السؤال 1- أ) و استنتج الخاصة الأساسية للعدد i و الذي يسمى بالعدد التخيلي.

جـ) بين أنه من أجل كل نقطة $M(x\,;y)$ من المستوي : $\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)=x+iy$.

العدد المركب $x+iy$ يسمى لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ (أو لاحقة النقطة M).

د) بين أن لاحقة كل نقطة M إحداثياها $(x;y)$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ مختلفة عن النقطة O تكتب على الشكل: $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث (ρ,θ) هما الإحداثيين القطبيين للنقطة M في نفس المعلم.

الـــــــحـــــــل

1-أ) $\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right)=1$, $\varphi\left(\overrightarrow{OC}\right)=-1$, $\varphi\left(3\overrightarrow{OA}\right)=3$,

$\varphi\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=2$, $\varphi\left(5\vec{u}\right)=5$

ب) لدينا $\overrightarrow{OM}(x;0)$ ومنه $k\overrightarrow{OM}(kx;0)$ و بالتالي :

$\varphi\left(k\overrightarrow{OM}\right)=kx$ أي $\varphi\left(k\overrightarrow{OM}\right)=k\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$

كذلك $\overrightarrow{OM}(x;0)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';0)$ و منه: الإحداثيات الديكارتية للشعاع $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ هي الثنائية $(x+x';0)$ وبالتالي:

$\varphi\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}\right)=x+x'$ أي

$\varphi\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{OM'}\right)$.

2-أ) * واضح أن B هي صورة A بالدوران r و منه:

$\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)=i\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right)$ أي $\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)=i$ لأن $\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right)=1$.

$\varphi\left(3\overrightarrow{OB}\right)=3\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)$ (من خواص φ) و منه: $\varphi\left(3\overrightarrow{OB}\right)=3i$.

* $\varphi\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)$ (من خواص φ)

ومنه: $\varphi\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=1+3i$.

* $\varphi\left(5\vec{v}\right)=5\varphi\left(\vec{v}\right)=5i$ لأن $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

* $\varphi\left(3\vec{u}-5\vec{v}\right)=3\varphi\left(\vec{u}\right)-5\varphi\left(\vec{v}\right)$ (من خواص φ) ومنه:

$\varphi\left(3\vec{u}-5\vec{v}\right)=3-5i$.

ب) $\varphi\left(\overrightarrow{OC}\right)=i\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)$ (بما أن C هي صورة B بالدوران r).

و منه: $\varphi\left(\overrightarrow{OC}\right)=i\left(i\right)=i^2$.

بالمقارنة مع نتائج السؤال 1-أ) نجد: $i^2=-1$.

i هو العدد الذي يحقق : $i^2=-1$.

جـ) من أجل كل نقطة $M\left(x;y\right)$ من المستوي لدينا:

$\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ و منه:

$$\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)=\varphi\left(x\vec{u}+y\vec{v}\right)=x\varphi\left(\vec{u}\right)+y\varphi\left(\vec{v}\right)=x+iy$$

د) $\left(\rho;\theta\right)$ الإحداثيين القطبيين للنقطة $M\left(x;y\right)$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ومنه نجد أن : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\rho$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\theta+2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و بالتالي يصبح لدينا : $x=\rho\cos\theta$ و $y=\rho\sin\theta$ أي

: $\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$.

النشاط2

نعتبر العدد المركب المكتوب الى الشكل $x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و i العدد الذي يحقق $i^2=-1$.

ليكن $z=1+3i$ و $z'=\frac{1}{2}-2i$.

1- باستعمال نفس قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ أكتب على الشكل $x+iy$ كل من:

أ) $z+z'$, $3z$, $-z'$, $z-z'$, $3z-2z'$.

ب) z^2 , $z\times z'$, $z^2-z'^2$, $(z+z')^2$, z^3.

2-أ) نضع : $\frac{1}{z}=\frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)}$

عين العددين الحقيقيين x و y حيث: $\frac{1}{z}=x+iy$.

ب) نفس السؤال بالنسبة للأعداد المركبة : $\frac{1}{z'}$, $\frac{z'}{z}$, $\frac{3z}{z+z'}$.

3-أ) عين كل من : i^3 , i^4 , i^5 ثم i^n بدلالة العدد الطبيعي n

ب) عين $\frac{1}{i^n}$ بدلالة العدد الطبيعي n.

الحـــــــل

1-أ) • $z+z'=(1+3i)+\left(\frac{1}{2}-2i\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)+i(3-2)=\frac{3}{2}+i$

• $3z=3(1+3i)=3+9i$

• $-z'=-\left(\frac{1}{2}-2i\right)=-\frac{1}{2}+2i$

• $z-z'=(1+3i)-\left(\frac{1}{2}-2i\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+i(3+2)=\frac{1}{2}+5i$

• $3z-2z'=3(1+3i)-2\left(\frac{1}{2}-2i\right)=(3+9i)-(1-4i)$

$=(3-1)+i(9+4)=2+13i$

ب) • $z^2=(1+3i)^2=1^2+2(1)(3i)+(3i)^2$

$=1+6i-9=-8+6i$

لأن : $i^2=-1$.

•

$z\times z'=(1+3i)\left(\frac{1}{2}-2i\right)=1\left(\frac{1}{2}\right)-1(2i)+(3i)\left(\frac{1}{2}\right)-(3i)(2i)$

$=\frac{1}{2}-2i+\frac{3}{2}i+6=\left(\frac{1}{2}+6\right)+i\left(-2+\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{2}-\frac{1}{2}i$

• $=\left(\frac{3}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}+5i\right)$

$z^2-z'^2=(z+z')(z-z')$

$=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)(5i)+i\left(\frac{1}{2}\right)+i(5i)=\frac{3}{4}+\frac{15}{2}i+\frac{1}{2}i-5$

$$=\left(\frac{3}{4}-5\right)+i\left(\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{17}{4}+8i$$

- $$\left(z+z'\right)^2=\left(\frac{3}{2}+i\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)\left(i\right)+\left(i\right)^2$$

$$=\frac{9}{4}+3i-1=\frac{5}{4}+3i$$

- $$z^3=\left(1+3i\right)^3=1^3+3\left(1^2\right)\left(3i\right)+3\left(1\right)\left(3i\right)^2+\left(3i\right)^3$$

$$=1+9i-9-27i=-8-18i$$

لأن: $i^3=i^2.i=-i$.

2-أ) لدينا: $\left(1+3i\right)\left(1-3i\right)=\left(1\right)^2-\left(3i\right)^2=1+9=10$ و منه:

$$\frac{1}{z}=\frac{1-3i}{\left(1+3i\right)\left(1-3i\right)}=\frac{1-3i}{10}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$$.

أي : $x=\frac{1}{10}$ و $y=-\frac{3}{10}$.

ب) •
$$\frac{1}{z'}=\frac{1}{\frac{1}{2}-2i}=\frac{\frac{1}{2}+2i}{\left(\frac{1}{2}-2i\right)\left(\frac{1}{2}+2i\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+2i}{\frac{17}{4}}=\frac{2}{17}+\frac{8}{17}i$$

لأن: $\left(\frac{1}{2}-2i\right)\left(\frac{1}{2}+2i\right)=\frac{17}{4}$ و منه: $x=\frac{2}{17}$ و $y=\frac{8}{17}$.

• $\frac{z'}{z}=\frac{\left(\frac{1}{2}-2i\right)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{-\frac{11}{2}-\frac{7}{2}i}{10}=-\frac{11}{20}-\frac{7}{20}i$.

• $\frac{3z}{z+z'}=\frac{3(1+3i)}{\frac{3}{2}+i}=\frac{3(1+3i)\left(\frac{3}{2}-i\right)}{\left(\frac{3}{2}+i\right)\left(\frac{3}{2}-i\right)}$

$$=\frac{\frac{27}{2}+\frac{21}{2}i}{\frac{13}{4}}=\frac{54}{13}+\frac{42}{13}i$$

لأن: $3(1+3i)\left(\frac{3}{2}-i\right)=\frac{27}{2}+\frac{21}{2}i$ و $\left(\frac{3}{2}+i\right)\left(\frac{3}{2}-i\right)=\frac{13}{4}$.

3-أ) $i^3=i^2\times i=-i$, $i^4=i^2\times i^2=1$,

$i^5=i^3\times i^2=(-i)(-1)=i$.

تعيين i^n بدلالة n:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
i^n	1	i	-1	$-i$

ب) تعيين $\frac{1}{i^n}$ بدلالة n:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$\frac{1}{i^n}$	1	$-i$	-1	i

الـــــــــدرس:

1 – تعريف مجموعة الأعداد المركبة :

ليكن i العدد حيث $i^2 = -1$

المجموعة $\mathbb{C}$ للأعداد المركبة هي مجموعة الأعداد التي تكتب على الشكل $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

2– التمثيل الهندسي لعدد مركب :

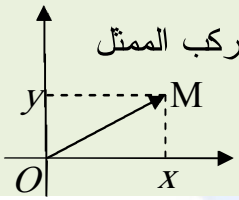
المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

– كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد.
وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.

– النقطة $J(o\,;\,1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .

– من أجل كل عددان حقيقيان x و y، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M\left(x\,;y\right)$ بالرمز $x + iy$.

– يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.



3– الشكل الجبري لعدد مركب :

من أجل كل عددان حقيقيان x و y: الشكل $x + iy$ يسمى الشكل الجبري لعدد مركب Z .

4- تعار يف و مصطلحات:

ليكن $Z = x + iy$ عدد مركب، x و y عددان حقيقيان

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء أو القسم الحقيقي للعدد المركب Z و نرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(Z)$ أي : $\mathrm{Re}(Z) = x$
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء أو القسم التخيلي للعدد المركب Z ويرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(Z)$ أي : $\mathrm{Im}(Z) = y$.
- النقطة $M(x ; y)$ تسمى صورة العدد المركب Z و العدد Z يسمى لاحقة النقطة $M(x ; y)$
- من أجل كل عدد حقيقي x , y , x' , y' فإن العدد $x + iy$ يساوي العدد $x' + iy'$ إذا وفقط إذا كان: $x = x'$ و $y = y'$ و النقطتان $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ منطبقتان.
- كل عدد حقيقي هو عدد مركب جزؤه التخيلي معدوم و لدينا : $Z \in \mathbb{R}$ يكافئ : $\mathrm{Im}(Z) = 0$.
- يكون العدد المركب Z تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $\mathrm{Re}(Z) = 0$
- محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعى المحور التخيلي.
- إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة $O(0 ; 0)$.

5- الحساب في $\mathbb{C}$:

- المجموع و الجداء في $\mathbb{C}$:

من أجل كل عددين مركبين z و z' حيث:

$z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ لدينا:

1.

$$z + z' = (x + x') + i\,(y + y')$$

2.

$$Z \times Z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)$$

3.

$Z \,.\, Z' = 0$ تكافئ : $Z = 0$ أو $Z' = 0$

أمثلة :

نعتبر العددان المركبان: $Z_1 = 3 + 2i$; $Z_2 = -4 + 5i$.

1) احسب كل من $Z_1 + Z_2$, $Z_1 \times Z_2$.

2) احسب Z_1^2 ; Z_2^3.

الحل :

1) • $Z_1 + Z_2 = (3 - 4) + i\,(2 + 5)$

ومنه : $Z_1 + Z_2 = -1 + 7i$

• $Z_1 \times Z_2 = (3 + 2i)\,(-4 + 5i)$

$$= -12 + 15i - 8i + 10i^2 = -12 + 7i - 10$$

و منه : $Z_1 \times Z_2 = -22 + 7i$

2) $Z_1^2 = (3 + 2i)^2 = (3)^2 + 2(3) \times 2i + (2i)^2$

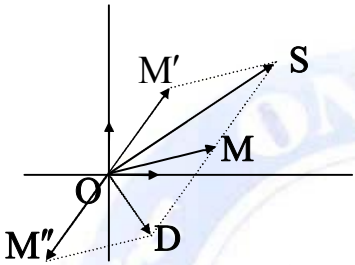
و منه: $Z_1^2 = 9 + 12i - 4$ أي: $Z_1^2 = 5 + 12i$

$$Z_2^3 = (-4 + 5i)^3 = (-4)^3 + 3(-4)^2 \times 5i + 3(-4)(5i)^2 + (5i)^3$$

$$= -64 + 240i + 300 - 125i = 236 + 115i$$

خواص :

إذا كان Z و Z' لاحقتي النقطتين M و M' (أو الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$) على الترتيب فإن :



- $Z + Z'$ هو لاحقة النقطة S (أو الشعاع $\overrightarrow{OS}$) حيث:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

- $Z - Z'$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{M'M}$ (أو النقطة D حيث: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{M'M}$)

وعليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B علي الترتيب فإن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $Z_{\overrightarrow{AB}}$ حيث: $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

ولاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هو Z_I حيث $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

– مقلوب عدد مركب:

Z عدد مركب غير معدوم. حيث $Z = x + iy$.

لدينا : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

و منه : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب Z غير المعدوم.

أي x و y غير معدومين معا.

– حاصل قسمة عددين مركبين:

Z و Z' عددان مركبان حيث: $Z' \neq 0$

مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right)$$

$$= \frac{xx'}{x'^2 + y'^2} - i \frac{xy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y}{x'^2 + y'^2} + \frac{yy'}{x'^2 + y'^2}$$

$$= \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

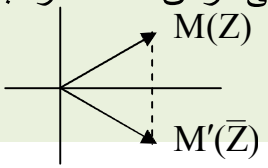
وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z}{Z'}$ أي حاصل قسمة العدد المركب Z على العدد المركب غير المعدوم Z'.

6– مرافق عدد مركب :

تعريف :

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان نظيرة بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M' ذات اللاحقة $x - iy$. العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x + iy$ ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$

أي : $\bar{Z} = x - iy$



أمثلة :

مرافق العدد المركب: $Z_1 = 1 + i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_1 = 1 - i$

مرافق العدد المركب: $Z_2 = i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_2 = -i$

مرافق العدد المركب: $Z_3 = 8 + 3i$ هو العدد المركب:

$$\overline{Z}_3 = 8 - 3\,i$$

مرافق العدد المركب: $Z_4 = 10$ هو العدد المركب: $\overline{Z}_4 = 10$

أي أن : $\overline{Z}_4 = Z_4$

خواص :

أ) x و y عددان حقيقيان. $Z = x + iy$ عدد مركب.

$\overline{Z} = x - iy$ مرافق العدد المركب Z .

1) لدينا : $Z = x + iy$ ومنه : $Z \times \overline{Z} = x^2 + y^2$

2) لدينا : $Z = x + iy$ ومنه : $\overline{\overline{Z}} = x + iy$

وعليه : $\overline{\overline{Z}} = Z$

3) لدينا : $Z + \overline{Z} = 2\,x$ ومنه : $Z + \overline{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z)$

4) $Z - \overline{Z} = 2\,i\,y$ ومنه : $Z - \overline{Z} = 2\,\mathrm{Im}\,(Z)$

5) $Z \,.\, \overline{Z} = x^2 + y^2$

6) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ: $Z = \overline{Z}$

7) Z تخيلي صرف يكافئ : $Z = -\overline{Z}$

ب) x, x', y, y' أعداد حقيقية . Z_1 , Z_2 عدادان مركبان حيث :

$$Z_1 = x + i\,y \quad ; \quad Z_2 = x' + i\,y'$$

1) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{\left(x + x' + i\,(y + y')\right)}$

$$= x + x' - i\,(y + y') = x - i\,y + x' - i\,y'$$

ومنه: $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$

2) $\overline{Z_1 \,.\, Z_2} = \overline{\left[(xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)\right]}$

$$= (xx' - yy') - i\,(xy' + x'y)$$

$$\overline{Z}_1 \,.\, \overline{Z}_2 = (x - iy).(x' - iy)$$
$$= (xx' - yy') - i\,(xy' + x'y)$$

وعليه: $\overline{Z_1 \,.\, Z_2} = \overline{Z}_1 \,.\, \overline{Z}_2$

3) $$\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

وعليه : $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{Z_1}$

4) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$

5) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$

وإذا كان: $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ فإن: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$

أمثلة :

1) $$\overline{(1 + 2i)\,(3 - i)} = \overline{(1 + 2i)}\;\overline{(3 - i)}$$
$$= (1 - 2i)\,(3 + i)$$

2) $$\overline{\left(\frac{1}{3 + i}\right)} = \frac{1}{\overline{3 + i}} = \frac{1}{3 - i}$$

3) $\overline{\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)} = \frac{\overline{(2+3i)}}{\overline{(5+i)}} = \frac{2-3i}{5-i}$

4) $\overline{\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1-\bar{a}\,.\,\bar{b}}$

حيث: a و b عددان مركبان مع $ab \neq 1$.

تطبيق :

M نقطة من المستوى لاحقتها $Z = x + iy$ ، M' نقطة من المستوى لاحقتها $Z' = \frac{Z+1}{Z-1}$

1) اكتب Z' على الشكل الجبري.

2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي .

3) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف.

الحل :

1) كتابة Z' على الشكل الجبري :

$$Z' = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+iy+1)(x-1-iy)}{(x+iy-1)(x-1-iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

2) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي :

Z' حقيقي يكافئ : $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$

ويكافئ : $\begin{cases} y = 0 \\ (x\,;\,y) \neq (1\,,\,0) \end{cases}$.

ومنه مجموعة النقط M هي محور الفواصل باستثناء النقطة $A\,(1\,;\,0)$.

3) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف:

Z' تخيلي صرف يكافئ : $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} = 0$

ويكافئ : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x\,;\,y) \neq (1\,,\,0) \end{cases}$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة $A\,(1\,;\,0)$.

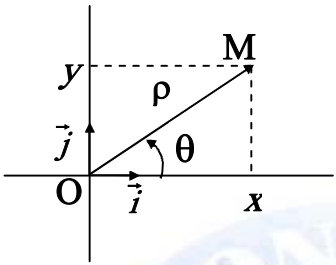
6- طويلة و عمدة لعدد مركب :

المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. M نقطة من المستوي إحداثياتها القطبيان $[\rho\,;\,\theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي و عليه Z لاحقة النقطة M يكتب على الشكل : $\rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

- $\rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z
- نصف القطر القطبي OM يحقق $OM = \rho$ ويسمى طويلة Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.
- الزاوية القطبية $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ تحقق $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و تسمى عمدة للعدد المركب Z . و نرمز لها بالرمز $\arg(Z)$ ونكتب : $\arg(Z) = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

البرهان :

لتكن M نقطة من المستوى إحداثياها القطبيان $[\rho\ ;\ \theta]$ فيكون إحداثياها $(x\ ;\ y)$ معرفان كما يلي :



$$\begin{cases} x = \rho\ cos\theta \\ y = \rho\ \sin\theta \end{cases}$$

وعليه إذا كان Z لاحقة M فإن :

$$Z = x + iy = \rho\ cos\theta + i\rho\ \sin\theta$$

ومنه : $Z = \rho\ (cos\theta + i\ \sin\theta)$

ملاحظات :

لدينا : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وعليه : $|Z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

وعليه : $cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

وإذا كان $Z = 0$ فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

أمثلة :

عين الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_1 = 1 + i\ ;\ Z_2 = i\ ;\ Z_3 = \sqrt{3} - i$$

الحل :

- $Z_1 = 1 + i\ ;\ |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

نفرض θ_1 عمدة Z_1 فيكون : $cos\theta_1 = \dfrac{x}{|Z_1|}$ و $\sin\theta_1 = \dfrac{y}{|Z_1|}$

ومنه : $cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

• $Z_2 = i \ ; \ |Z_2| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$

نفرض θ_2 عمدة Z_2 فيكون : $cos\theta_2 = \frac{x}{|Z_2|}$ و $\sin\theta_2 = \frac{y}{|Z_2|}$

$$cos\theta_2 = \frac{0}{1} = 0 \ , \ \sin\theta_2 = \frac{1}{1}$$

إذن : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

• $Z_3 = \sqrt{3} - i \ ; \ |Z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

• نفرض θ_3 عمدة Z_3 فيكون : $cos\theta_3 = \frac{x}{|Z_3|}$, $\sin\theta_3 = \frac{y}{|Z_3|}$

إذن : $cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta_3 = \frac{-1}{2}$

وعليه : $\theta_3 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

خواص :

أ) Z عدد مركب غير معدوم.

1) Z حقيقي موجب يكافئ : $\arg(Z) = 0 + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

2) Z حقيقي سالب يكافئ : $\arg(Z) = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

3) $\mathrm{Im}(Z) > 0$ و $\mathrm{Re}(Z) = 0$ يكافئ :

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

4) $\mathrm{Im}(Z) < 0$ و $\mathrm{Re}(Z) = 0$ يكافئ :

$$\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

أمثلة :

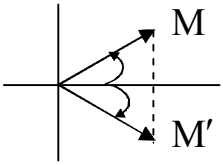
عين عمدة لكل من الأعداد المركبة الآتية دون حساب

$$Z_4 = -2i \ ; \ Z_3 = 5i \ ; \ Z_2 = -4 \ ; \ Z_1 = 3$$

الحل :

- $Z_1 = 3$ ومنه : $\arg(Z_1) = 0 + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_2 = -4$ ومنه: $\arg(Z_2) = \pi + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_3 = 5i$ ومنه: $\arg(Z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_4 = -2i$ ومنه: $\arg(Z_4) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

ب) $|\bar{Z}| = |Z|$ و $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$



ت) جداء عددان مركبان :

Z , $\bar{Z}$ عددان مركبان غير معدومين حيث :

$$Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{و} \quad Z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$Z\,.\,Z' = \rho\rho'\left[\cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta' + i\,(\sin\theta.\cos\theta' + \cos\theta.\sin\theta')\right]$$

ومنه : $ZZ' = \rho\rho'\,\left[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right]$

إذن : $|Z\,.\,Z'| = |Z|\,.\,|Z'|$

$$\arg(Z\,.\,Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

ث) مقلوب عدد مركب غير معدوم :

نعتبر العدد المركب غير المعدوم : $Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\rho(\cos^2\theta + i\sin^2\theta)}$$

إذن : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$

وعليه : $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z) + 2k\pi$ و $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

ج) حاصل قسمة عددين مركبين:

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z' \neq 0$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \left|Z \cdot \frac{1}{Z'}\right| = |Z| \cdot \left|\frac{1}{Z'}\right| = |Z| \cdot \frac{1}{|Z'|}$$

ومنه :

$$\boxed{\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}}$$

$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg\left(Z \times \frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right)$$

ومنه :

$$\boxed{\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')}$$

ح) تساوي عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان غير معدومين حيث :

$Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $Z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$Z = Z'$ يكافئ :

$$\boxed{\begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

خ) طويلة و عمدة Z^n :

Z عدد مركب غير معدوم ، n عدد صحيح.

- لدينا $\boxed{|Z^n| = |Z|^n}$ و $\boxed{\arg(Z^n) = n \cdot \arg(Z)}$

البرهان : راجع الصفحة 165(من تمارين المتاليات– رقم17)

نتيجة :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

من أجل $n \in \mathbb{Z}$; $\theta \in \mathbb{R}$.

وهو ما يعرف بدستور موافر .

تطبيق:

Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث: $Z_1 = 3i$; $Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

احسب طويلة وعمدة كل من Z_1 , Z_2 , $Z_1 \times Z_2$, Z_1^2

Z_2^{100} , $\frac{1}{Z_1}$, $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل :

- $|Z_1| = 3$, $|Z_2| = 2$

لتكن θ_1 عمدة Z_1 : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_1 = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ومنه : $\theta_1 \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ولتكن θ_2 عمدة Z_2 : $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta_2 \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

- $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2| = 6$

$$\arg(Z_1 . Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- $$\left|Z_1^2\right| = \left|Z_1\right|^2 = 3^2 = 9$$

$$\arg\left(Z_1^2\right) = 2\arg\left(Z_1\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

و منه : $\arg\left(Z_1^2\right) = \pi\ [2\pi]$

- $\left|Z_1^{100}\right| = \left|Z_1\right|^{100} = 3^{100}$ ؛ $\arg\left(Z_1^{100}\right) = 100\arg\left(Z_1\right)$

ومنه : $\arg\left(Z_1^{100}\right) = 100\ \frac{\pi}{2}\ [2\pi] = 0\ [2\pi]$

- $$\left|\frac{1}{Z_1}\right| = \frac{1}{\left|Z_1\right|} = \frac{1}{3}$$

$$\arg\left(\frac{1}{Z_1}\right) = -\arg\left(Z_1\right)\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

- $$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|} = \frac{3}{2}$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg\left(Z_1\right) - \arg\left(Z_2\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

ومنه : $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

7- الشكل الأسي لعدد مركب (ترميز أولر)

- التعريف :

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي θ : $cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

فإذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث:

$z = \rho\left(cos\theta + i\sin\theta\right)$ فإن: $z = \rho\,.\,e^{i\theta}$.

مثال :

اكتب العدد المركب $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i$ على الشكل الأسي :

الحل :

$|z| = 4\sqrt{2}$, $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$ وعليه : $z = 4\sqrt{2}\,.\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$

- خواص :

ليكن Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث: $Z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $Z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

1) $Z_1\,.\,Z_2 = \rho_1\,.\,\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\dfrac{1}{Z_1} = \dfrac{1}{\rho_1}\,.\,e^{-i\theta_1}$

3) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,.\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

4) $Z_1^n = \rho_1^n\,.\,e^{in\theta}$

5) $\overline{Z}_1 = \rho_1\,.\,e^{-i\theta_1}$

ملاحظة :

لدينا : $e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta$; $e^{i\theta'} = cos\theta' + i\sin\theta'$ وعليه :

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} = cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \quad ...(1)$$

ولدينا : $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = (cos\theta + i\sin\theta)(cos\theta' + i\sin\theta')$

$$= cos\theta . cos\theta' - \sin\theta . \sin\theta' + i(cos\theta . \sin\theta' + \sin\theta . cos\theta') \quad ...(2)$$

من (1) ; (2) : $cos(\theta+\theta') = cos\theta . \cos\theta' - \sin\theta . \sin\theta'$

$$\sin(\theta+\theta') = cos\theta . \sin\theta' + \sin\theta . \cos\theta'$$

8 – المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad ...(1)$$

مع a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$ في

الشكل النموذجي للعبارة $az^2 + bz + c$ هو :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نجد : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- إذا كان $\Delta \geq 0$: للمعادلة (1) حلين حقيقيين.

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان $\Delta < 0$: نضع $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

فيكون :

$$az^2+bz+c=a\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$ وعليه

المعادلة (1) تكافئ :

$$z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

أي للمعادلة (1) حلين مركبين مترافقين .

مثال :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+z+1=0$

الحل :

$$\Delta=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$$

بما أن $\Delta<0$ فإن للمعادلة حلين مركبين مترافقين هما:

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

* حل معادلة من الشكل $z^n=a$

إذا $n\geq 2$ مع $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}^*$ و $a\in\mathbb{C}^*$, نكتب z على الشكل الأسي و ليكن $z=re^{i\theta}$ و $a=\rho e^{i\alpha}$

$z^n=a$ يكافئ $r^ne^{in\theta}=\rho e^{i\alpha}$ يكافئ $\begin{cases} r^n=\rho \\ n\theta=\alpha+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

أي : $\begin{cases} r=\sqrt[n]{\rho} \\ \theta=\dfrac{\alpha}{n}+k\dfrac{2\pi}{n};k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.المعادلة تقبل إذن n حلا من أجل

$k\in\{0;1;2;...;n-1\}$.

مثال :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=8i$

تعطى الحلول على الشكل الجبري .

الحل :

نضع $z=re^{i\theta}$ مع $r>0$ و $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z=re^{i\theta}$ يكافئ $r^3e^{i3\theta}=8e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases} r^3=8 \\ 3\theta=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

أي: $\begin{cases} r=2 \\ \theta=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

من أجل $k=0$, $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$

من أجل $k=1$, $z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i$

من أجل $k=2$, $z=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2i$

ومنه : $S=\left\{-2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}$

9- الأعداد المركبة و التحويلات النقطية :

تذكير بالتحويلات النقطية المألوفة :

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

التحويل T	العناصر المميزة	تعريف T مع $M'=T\left(M\right)$
الانسحاب	شعاع غير معدوم $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
التحاكي	نقطة Ω و عدد حقيقي $k\neq 0$	$\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}$
الدوران	نقطة Ω و زاوية قيسها θ بتقريب 2π	$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\end{cases}$
التناظربالنسبة لمحور الفواصل	محور الفواصل	$\begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\ \left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\end{cases}$

* مبرهنة:

ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات الاحقة z'.

التحويل T	العناصر المميزة	الكتابة المركبة لـــ T
الإنسحاب	شعاع غير	$z'=z+u$

	معدوم $\vec{u}(\alpha,\beta)$ ذا ت الاحقة $u=\alpha+i\beta$	
التحاكي	نقطة Ω ذات الاحقة ω و عدد حقيقي $k\neq 0$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ او $z'=kz+b$ مع $b\in\mathbb{C}$
الدوران	نقطة Ω ذات الاحقة ω و زاوية قيسها θ بتقريب 2π	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ أو $z'=e^{i\theta}z+b$ مع $b\in\mathbb{C}$
التناظربالنسبة لمحور الفواصل	محور الفواصل	$z'=\overline{z}$

البرهان :

- إذا كان $z'=z+\beta$ فإن $z'-z=z_{\overrightarrow{MM'}}=\beta$

ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت.

وعليه فهو يعرف انسحاب.

- إذا كان $z'-z_0=k(z-z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات

اللاحقة z_0 بواسطة T هي نفسها. ومن أجل $z \neq z_0$

فإن : $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = k \quad , \quad k \in \mathbb{R}^*$.

ومنه : $\dfrac{M_0M'}{M_0M} = |k|$

فإذا كان $k > 0$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = 0\ [2\pi]$

و إذا كان $k < 0$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \pi\ [2\pi]$

وفي الحالتين النقط M_0 , M , M' على استقامة واحدة.

و بالنسبة $\dfrac{M_0M'}{M_0M} = |k|$ تميز تحاكي مركزه M_0 و نسبته k .

- إذا كان $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 بواسطة التحويل T هي نفسها. ومن أجل : $z \neq z_0$

فإن : $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = e^{i\theta}$

ومنه : $\dfrac{M_0M'}{M_0M} = 1$ و $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta\ [2\pi]$

هاتين العلاقتين تميزان دوران مركزه M_0 و زاويته θ .

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل T الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' في كل حالة مما يلي :

1) $z' = z - 1$ 2) $z' = z + i + 1$ 3) $z' = 3z$

4) $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\, z + i$ 5) $z' = iz$

6) $z' = -2z + i + 2$

الحل :

1) لدينا : $z' = z - 1$

T انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة -1.

2) لدينا: $Z' = Z + i + 1$

T انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة $1 + i$.

3) لدينا : $z' = 3z$

T تحاك نسبته 3 و مركزه O.

4) لدينا : $z' = -2z + i + 2$

T تحاك نسبته -2 و مركزه I حيث لاحقته $z_0 = \frac{i}{1 - i - 1}$.

إذن $z_0 = -1$.

5) لدينا : $z' = iz \ , \ i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

T دوران مركزه O وزاويته عمدة i أي $\frac{\pi}{2}$.

6) لدينا : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)z + i$

ولدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$

وعليه T دوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة z_0

حيث : $z_0 = \dfrac{i}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$ ومنه : $z_0 = \dfrac{2i}{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$ أي :

$$z_0 = \frac{2i\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}{\left[2-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right]\left[2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right]}$$

وعليه : $z_0 = \dfrac{-2\sqrt{2}+2\left(2-\sqrt{2}\right)i}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2+2}$.

التفسيرات الهندسية:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. التفسير الهندسي لتساوي طويلتين:

لتكن A ، B و M نقط من المستوي لواحقها على الترتيب a ، b و m .

- إذا $|m-a|=|m-b|$ فإن $AM = BM$ و هذا يعني أن النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$.
- إذا $|m-a|=r$ ، مع $r\in\mathbb{R}_+^*$, فإن $AM = r$ و هذا يعني أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و طول نصف قطرها r .

2. التفسير الهندسي لحاصل قسمة عددين مركبين :

النقطتان M و M' لاحقتاهما على الترتيب z و z' .

- ليكن $Z=\dfrac{z}{z'}$ مع $z\neq 0$ و $z'\neq 0$

$$\arg Z = \arg z - \arg z' = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} .$$

$$\arg Z = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM'},\vec{u}\right)=\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$$

ملاحظة:

عمدة لحاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين هي زاوية شعاعين. •لتكن النقط $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ و $D(z_D)$ مع $z_A \neq z_B$ و $z_C \neq z_D$,

إذن:

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right) + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}}$$

3. أشكال هندسية خاصة:

- (ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين مباشر في B) معناه: $\frac{z_A - z_B}{z_c - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- (ABC مثلث متقايس الأضلاع) معناه: $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$
- (ABC مثلث متقايس الأضلاع مباشر) معناه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

أو $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$.

- ($ABCD$ متوازي أضلاع) معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

أو $z_B - z_A = z_C - z_D$.

مثال 1:

ABC مثلث حيث لواحق النقط A, B و C هي على الترتيب: $2 + i$, $4 + i$, $2 + 3i$.

برهن أن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

الحل :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{2+3i-2-i}{4+i-2-i}\right| = |i| = 1$$

ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ وعليه : $AC = AB$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

أي: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$

إذن المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين :

مثال 2:

ما هي طبيعة المثلث OAB علما أن A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $\sqrt{3}+i$ و $2i$ ؟

الحل :

نقوم بتبسيط العدد المركب Z حيث : $Z = \frac{z_O - z_A}{z_B - z_A}$ ثم نعين طويلة و عمدة له .

$$Z = \frac{-\sqrt{3}-i}{-2i-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ و منه : $|Z| = 1$

و $\arg Z = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

أي : $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و المثلث OAB متساوي الأضلاع .

4. التعبير عن دائرة بالعلاقة $z = z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

لتكن (C) دائرة مركزها ω ونصف قطرها k.

نفرض z_0 لاحقة ω ، k عدد حقيقي موجب تماما.

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z من (C)

لدينا : $M \in (C)$ تكافئ : $\|z - z_0\| = k$

و تكافئ $z - z_0$ هو عدد مركب غير معدوم طويلته k و تكافئ : يوجد عدد حقيقي θ (يمكن القول أن $\theta \in [0 ; 2\pi[$)

بحيث : $z = z_0 + k.e^{i\theta}$.

5. التعبير عن نصف مستقيم بالعلاقة $z = z_0 + k.\ e^{i\theta}$

ليكن $[wx)$ نصف مستقيم مبدأه ω و شعاع توجيهه $\vec{v}$ معطى.

نفرض z_0 لاحقة w ، u لاحقة $\vec{v}$, $(u \in \mathbb{C}^*)$

حيث : $|u| = 1 \quad ; \quad \arg(u) = \theta\ [2\pi]$

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من المستوى لدينا :

$M \in [wx)$ تكافئ (يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث :

$\overrightarrow{wM} = k \cdot \vec{v}$) وتكافئ (يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث :

$z = z_0 + k.e^{i\theta}$)

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال:

التطبيق1:

نعتبر العدد المركب $z=\frac{(1-3i)^2}{5+i}$.

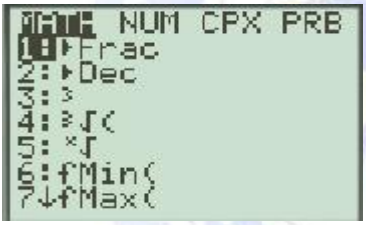
باستعمال آلة بيانية :

1) عين مرافق العدد z . 2) عين الجزء الحقيقي للعدد z .

3) عين الجزء التخيلي للعدد z . 4) عين طويلة العدد z .

5) عين عمدة العدد z . 6) أكتب العدد z على الشكل الجبري.

7) أكتب العدد z على الشكل الأسي.



الحل

1) تعيين المرافق :

ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة إلى CPX كما يظهر على الشاشة فتظهر قائمة كما في الشاشة الموالية.

نختار الرقم 1 لنحصل على :

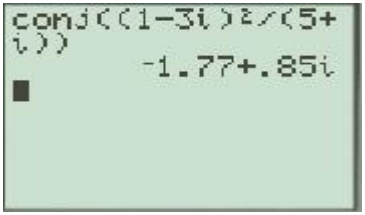
1:Conj (

نكتب عبارة z كمايلي :

Conj ((1-3i)^2)/(5+i))

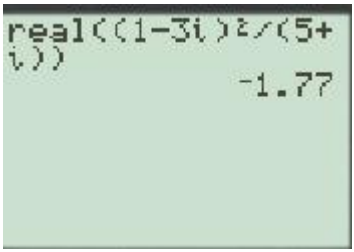
وننقر على Enter فنحصل على النتيجة

-1,77+0,85i



والتي تمثل مرافق z

2) تعيين الجزء الحقيقي :



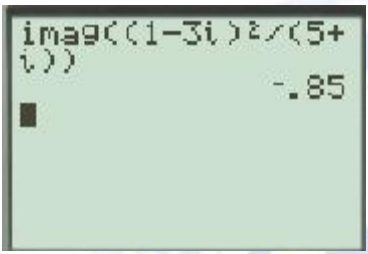
ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة إلى CPX ثم على الرقم 2

فتظهر على الشاشة العبارة : real(

ندخل عبارة : : real((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد : **–1,77**

3) تعيين الجزء التخيلي :



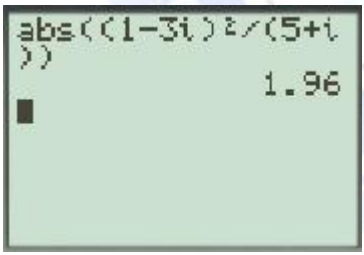
ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة إلى CPX ثم على الرقم 3

فتظهر على الشاشة العبارة : Imag(

ندخل عبارة : : Imag((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد: 5 0,8 −

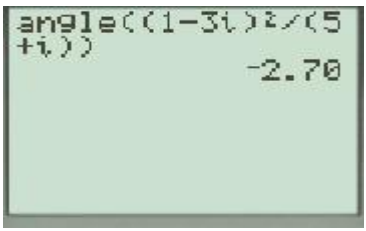
4)ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة إلى CPX ثم على الرقم 5 فتظهر على الشاشة العبارة : abs (



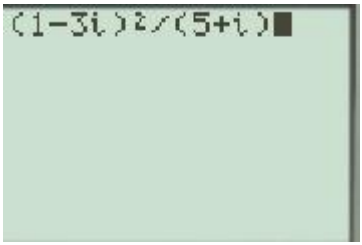
ندخل عبارة : abs((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد: 1,96

5)ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة إلى CPX ثم على الرقم 4 فتظهر على الشاشة العبارة : angle (



ندخل عبارة : angle((1-3i)^2)/(5+i))



ننقر على Enter فنجد: $-2,70$

6)كتابة Z على الشكل الجبري :

نكتب على الشاشة عبارة Z كمايلي :

(1-3i)^2/(5+i)

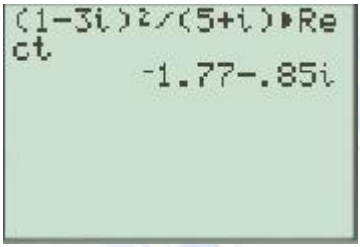
ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

إلى CPX ثم ننقر على الرقم 6

و ننقر على Enter

فتظهر على الشاشة العبارة :

$-1,77-0,85\,i$



7) كتابة Z على الشكل الأسي :

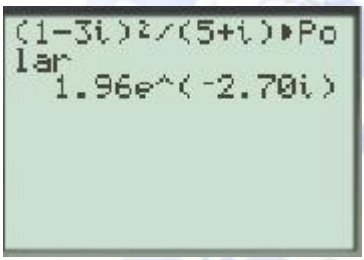
نكتب على الشاشة عبارة Z كما يلي :

(1-3i)^2/(5+i)

ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

إلى CPX ثم ننقر على الرقم 7 و ننقر

على Enter فتظهر على الشاشة العبارة : $1,96e^{-2,70i}$



ملاحظة 1 :

لكتابة الحرف i نقوم بما يلي :

ننقر على اللمسة 2nd ثم على اللمسة .

ملاحظة 2:

لتغيير عدد الأرقام بعد الفاصلة ننقر على اللمسة MODE ونحدد عدد الأرقام بعد الفاصلة باستعمال الزالقة وهذا في السطر الثاني ثم ننقر على Enter وقد اخترنا في الشكل ثلاثة أرقام بعد الفاصلة.