تمـــاريـــن و مشكـــــلات:

التمرين 1

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة.

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم $(O\,;\,\vec{k})$ هو : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ ☐

2) التمثيلان الآتيان هما لنفس المستقيم

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$ ☐

3) المعادلة الديكارتية لمستقيم في الفضاء تكون من الشكل : ☐

$$ax + by + cz + d = 0$$

4) كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a,b,c,d أعداد حقيقية هي معادلة لمستو. ☐

5) التمثيل الوسيطي الآتي : $\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = u + 2 \\ z = \lambda \end{cases}$ هو لمستو ☐

6) الجملة الآتية تمثل مستقيما : $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 2x + y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$ ☐

7) المعادلة $x - y + 4 = 0$ في الفضاء هي معادلة لمستقيم. ☐

8) المعدلة $4x - y + 5 = 0$ هي معادلة مستو في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد متجانس حيث شعاعه الناظمي $\vec{n}(4; -1 ; 0)$ ☐

9) النقط A,B,C حيث : $2\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ في استقامية. $\square$

10) إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A ; 1) , (B ; -2) , (c ; 3)\}$وكانت K مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -2)\}$ فإن G مرجح الجملة $\{(K ; -1) ; (C ; 3)\}$. $\square$

التمرين2 .

عين قيمة العدد الحقيقي x بحيث تكون النقطة C حيث : $\overrightarrow{CD} \frac{-1}{2} = \overrightarrow{CA}$ مرجح النقطتان D و A المرفقتان على الترتيب

بالمعاملين $x - 1$ وx على الترتيب.

التمرين3 .

ABC مثلث قائم في A . M نقطة حيث: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

بين أن M مرجح للنقطتين C , B المرفقتين بالمعاملين α و β حيث يطلب تعيينهما. استنتج أن M نقطة من (BC) .

التمرين4 .

نعتبر النقطتان $A(1 ; -3 ; 2)$, $B(-2 ; 1 ; 4)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2- استنتج أن (AB) هو تقاطع مستويين يطلب تعيينهما بمعادلتيهما.

التمرين5 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس تعطى النقط :

$A(-4 ; 2 ; 1)$,$B(-1 ; 5 ; 1)$,$C(-1 ; -2 ; 1)$, $D(0 ; 1 ; 3)$

1- هل النقط A,B,C في استقامية؟

2- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى الذي يشمل النقط A,B,C

3- هل D نقطة من المستوى (ABC)؟

4- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (DAB) .

التمرين6 .

إليك التمثيل الوسيطي لمستو (P) :
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu - 1 \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = \lambda - 3\mu + 2 \end{cases}$$

1− اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2 ; 5)$ ويوازي (P) .

التمرين7 .

إليك النقط $L(1 ; -1 ; 3) , T(1 ; 2 ; -3) , S(-2 ; 1 ; 3)$

1− اكتب التمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل L ويحتوي على المستقيم (ST) ثم استنتج معادلته.

2− اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (ST) .

التمرين8 .

إليك التمثيلين الوسيطيين للمستوى (P) و المستقيم (D)

$$(D) : \begin{cases} x = \lambda' \\ y = -2\lambda' + 1 \\ z = -\lambda' \end{cases} \qquad (P) : \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

عين نقط تقاطع (P) و (D) .

التمرين9 .

تعطى النقط $C(0 , -1 , 1) ; B(-1 , 1 , -1) \; ; \; A(1 , 1 , -1)$
$D(-1 , 0 , 1) ;$ و الشعاع $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي $\vec{u}$.

2) اكتب المعادلة الديكارتية للمستوى (BCD) .

3) عين نقط تقاطع (Δ) و (BCD) .

التمرين10 .

(D) و (D') مستقيمان معرفان بتمثيلهما الوسيطيان في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$

$$(D):\begin{cases}x=\lambda+1\\ y=2\lambda-2\\ z=-\lambda+3\end{cases}\qquad (D'):\begin{cases}x=3\lambda'+3\\ y=-\lambda'-5\\ z=\lambda'+5\end{cases}$$

1- بين أن (D) و (D') متقاطعان.

2- عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (D) و (D').

التمرين11 .

إليك المستقيم(D) و المستقيم (Δ) حيث :

$$(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=t-1\\ z=-t\end{cases}\qquad (D):\begin{cases}x=-\lambda+1\\ y=2\lambda\\ z=\lambda+1\end{cases}$$

A نقطة من (Δ) فاصلتها α .

1- بين أن (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

2- بين أن (D) و (Δ) من مستويين مختلفين.

3- عين بدلالة α معادلة للمستوى (P_α) الذي يشمل المستقيم (D) و النقطة A .

4- هل يمكن تعيين α بحيث يكون (p_α) مارا من O

5- هل يمكن تعيين α بحيث يكون (p_α) موازيا محور الفواصل.

التمرين12 .

ليكن ABCDEFGH مكعب

وليكن (P) المستوي الذي

معادلته : $2x + 6y - z + 5 = 0$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (AB) و(AD) و (AE)

2- عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (BCG).

3- عين نقط تقاطع (BCG) و(P).

التمرين13 .

عين مجموعة النقط M(x ; y ; z) لتقاطع المستويين (P) و (P′)

حيث : $(P') : x + 2y - 3z = 0 \ , \ (p) : x - y + z - 4 = 0$

التمرين14 .

(P) مستو معادلته : $-x + y + z - 4 = 0$.

(P′) مستو يشمل النقط $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(0 ; 1 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 0)$.

1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P′) .

2- عين نقط تقاطع (P) و (P′) .

الحـــلـــــــــــول:

التمرين 1.

1) √ 2) × 3) × 4) × 5) √

6) √ 7) × 8) √ 9) √ 10) √.

التمرين 2.

تعيين قيمة x :

لدينا $\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ وعليه : $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

وبما أن C مرجح النقطتان A و D المرفقتين بالمعاملين x و $x-1$ على الترتيب فإن :

$$x \,.\, \overrightarrow{CA} + (x-1)\,\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

ومنه $\begin{cases} x = 2 \\ x - 1 = 1 \end{cases}$ وعليه : $x = 2$.

التمرين 3.

1- تبيان أن M مرجح C , B.

لدينا : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ أي: $5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$$5\overrightarrow{AM} - 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} - 2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

ومنه : $2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

إذن M مرجح النقطتان B و C المرفقتان بالمعاملين 2 و 3

وعليه $\alpha = 2$ و $\beta = 3$.

نعلم أنه إذا كانت M مرجح B و C فإن M نقطة من (BC).

التمرين 4 .

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) : $\overrightarrow{AB}(-3\ ;\ 4\ ;\ 2)$. لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء. تكون M نقطة من (AB) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ حيث λ عدد حقيقي وعليه: $\begin{cases} x - 1 = -3\lambda \\ y + 3 = 4\lambda \\ z - 2 = 2\lambda \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} x = -3\lambda + 1 \\ y = 4\lambda - 3 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$

2) تبيان أن (AB) هو تقاطع مستويين :

لدينا : $\begin{cases} x = -3\lambda + 1 \ldots (1) \\ y = 4\lambda - 3 \ldots (2) \\ z = 2\lambda + 2 \ldots (3) \end{cases}$

من (1) : $\lambda = \dfrac{-1}{3}(x - 1)$ وبالتعويض في (2) نجد :

$y = \dfrac{-4}{3}(x - 1) - 3$ وعليه : $3y = -4(x-1) - 9$

إذن : $3y + 4x - 5 = 0$ وبالتعويض في (3) : $z = \dfrac{-2}{3}(x-1) + 2$

ومنه $3y = -2x + 8$ ومنه : $3y + 2x - 8 = 0$

وبالتالي : $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 4x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$

وهي الجملة المكونة من تقاطع مستويين معادلتيهما :

$4x + 3y - 5 = 0$ و $2x + 3y - 8 = 0$.

التمرين 5 .

1- البحث عن استقامية النقط A ,B , C :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3\ ,-4\ ;\ 0)\ ,\ \overrightarrow{AB}(3\ ;\ 3\ ;\ 0)$

نلاحظ أن إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل فهما غير متوازيان و بالتالي النقط A , B , C ليست في استقامية.

2- التمثيل الوسيطي للمستوي (P) :

بما أن A , B , C ليست في إستقامية فهي تكون معلما : $\left(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}\right)$ للمستوي (ABC) أي (P).

من أجل كل نقطة $M(x ; y ; z)$ من (P) لدينا : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

ومنه : $\begin{cases} x + 4 = 3\lambda + 3\mu \\ y - 2 = 3\lambda - 4\mu \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ y = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ z = 1 \end{cases}$

3- البحث عن كون D تنتمي إلى (ABC) :

لدينا : $\begin{cases} x = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ y = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ z = 1 \end{cases}$ وعليه :

إذا كانت D تنتمي إلى (ABC) فإن :

$\begin{cases} 0 = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ 1 = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ 3 = 1 \end{cases}$ وهذا مستحيل.

ومنه D ليست نقطة من (ABC) .

4- التمثيل الوسيطي للمستوي (DAB).

بما أن D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) فإن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ ليس لهما نفس الحامل ومنه $\left(D ; \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB}\right)$ معلم للمستوي (DAB).

لتكن M نقطة من (DAB) حيث $M(x ; y ; z)$

لدينا : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DB}(-1 ; 4 ; -2) , \overrightarrow{DA}(-4 ; 1 ; -2)$

وعليه : $\begin{cases} x+4 = -4\alpha - \beta \\ y-2 = \alpha + 4\beta \\ z-1 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = -4\alpha - \beta - 4 \\ y = \alpha + 4\beta + 2 \\ z = -2\alpha - 2\beta + 1 \end{cases}$

و هو التمثيل الوسيطي للمستوي (DAB)

التمرين 6 .

التمثيل الوسيطي للمستوي (p'):

بما أن (p') يوازي (P) فإن التمثيل الوسيطي للمستوي (p') يكون من الشكل :

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + x_0 \\ y = -2\lambda + \mu + y_0 \\ z = \lambda - 3\mu + z_0 \end{cases}$$

لكن A تنتمي إلى (p') ومنه :

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu - 1 \\ y = -2\lambda + \mu + 2 \\ z = \lambda - 3\mu + 5 \end{cases}$$

هو التمثيل الوسيطي للمستوي (p')

التمرين 7 .

1- كتابة معادلة (P) :

المستوي (P) يحتوي على ثلاث نقط هي L , S , T.

$$\overrightarrow{LT}(0;3;-6) \ , \ \overrightarrow{LS}(-3;2;0)$$

الشعاعان $\overrightarrow{LS}$ و $\overrightarrow{LT}$ ليس لهما نفس الحامل.

وعليه $\left(L , \overrightarrow{LS} , \overrightarrow{LT}\right)$ معلم للمستوي (P).

من أجل كل نقطة $M(x ; y ; z)$ من (D) لدينا :

$$\overrightarrow{LM} = \alpha\overrightarrow{LS} + \beta\overrightarrow{LT}$$

وعليه : $\begin{cases} x-1=-3\alpha \\ y+1=2\alpha+3\beta \\ z-3=-6\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=-3\alpha+1 \\ y=2\alpha+3\beta-1 \\ z=-6\beta+3 \end{cases}$

استنتاج المعادلة الديكارتية.

$$\begin{cases} x=-3\alpha+1 \ldots (1) \\ y=2\alpha+3\beta-1 \ldots (2) \\ z=-6\beta+3 \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) : $\alpha=\frac{1}{3}(1-x)$ و من (3) : $\beta=\frac{1}{6}(3-z)$. بتعويض α و β بقيمتيهما

في (2) نجد : $y = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}z\right)-1$

أي : $y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}z-1$

ومنه : $\frac{2}{3}x+y+\frac{1}{2}z-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1=0$

أي: $\frac{2}{3}x+y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{6}=0$ إذن : $\frac{4x+6y+3z-7}{6}=0$

وعليه معادلة المستوي هي : $4x+6y+3z-7=0$

2- التمثيل الوسيطي للمستقيم (ST) :

لدينا $\overrightarrow{ST}\,(3\,;\,1\,;\,-6)$. لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من (ST) أي:

$\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{ST}$ حيث: $\overrightarrow{SM}\,(x+2\,,\,y-1\,,\,z-3)$

ومنه : $\begin{cases} x+2=3\lambda \\ y-1=\lambda \\ z-3=-6\lambda \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=3\lambda-2 \\ y=\lambda+1 \\ z=-6\lambda+3 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (DT)

التمرين 8

تعيين نقط تقاطع (D) و (Δ) :

نحل الجملة : $\begin{cases} \lambda' = -1 + \lambda - \mu \\ -2\lambda' + 1 = 2 - \lambda + \mu \\ -\lambda' = \lambda - 2\mu \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} \lambda' - \lambda + \mu + 1 = 0 & \ldots(1) \\ -2\lambda' + \lambda - \mu - 1 = 0 & \ldots(2) \\ -\lambda' - \lambda + 2\mu = 0 & \ldots(3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $-\lambda' = 0$ ومنه $\lambda' = 0$

و عليه : $\begin{cases} -\lambda + \mu + 1 = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$

بالطرح نجد : $-\mu + 1 = 0$ ومنه : $\mu = 1$

و عليه : $\lambda = 2$ أي أن : $z = 0 , y = 1 , x = 0$

ومنه نقطة التقاطع هي : $I(0 ; 1 ; 0)$

التمرين 9

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء

تكون M من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$

وعليه : $\begin{cases} x - 1 = 2\lambda \\ y - 1 = -\lambda \\ z + 1 = \lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

2) المعادلة الديكارتية للمستوى (BCD) :

وهي من الشكل : $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

بما أن B , C , D نقط منه فإن :
$$\begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \ldots (1) \\ -\beta + \gamma + \delta = 0 \ldots (2) \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $-\alpha + 2\delta = 0$ ومنه : $\alpha = 2\delta$

بطرح (3) من (2) نجد : $-\beta + \alpha = 0$ ومنه : $\beta = \alpha$

إذن : $\beta = 2\delta$ بالتعويض في (1) نجد: $-2\delta + 2\delta - \gamma + \delta = 0$

وعليه: $\gamma = \delta$.

إذن معادلة المستوي هي: $2\delta x + 2\delta y + \delta z + \delta = 0$

أي : $\delta(2x + 2y + z + 1)$ ومنه : $2x + 2y + z + 1 = 0$

هي معادلة (BCD) .

3– تعيين نقط تقاطع (Δ) و (BCD) :

نحل الجملة :
$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

وعليه : $2(2\lambda + 1) + 2(-\lambda + 1) + \lambda - 1 + 1 = 0$

أي: $3\lambda + 4 = 0$ وعليه : $\lambda = \frac{-4}{3}$

إذن : $x = \frac{-8}{3} + 1 = \frac{-5}{3}$, $y = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, $z = \frac{-4}{3} - 1 = \frac{-7}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي : $J\left(\frac{-5}{3} ; \frac{7}{3} ; \frac{-7}{3}\right)$

التمرين 10 .

1) تبيان أن (D) و (D') متقاطعان. نحل الجملة :

$$\begin{cases} \lambda + 1 = 3\lambda' + 3 \\ 2\lambda - 2 = -\lambda' - 5 \\ -\lambda + 3 = \lambda' + 5 \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} \lambda = 3\lambda' + 2 \\ 6\lambda' + 4 - 2 = -\lambda' - 5 \\ -3\lambda' - 2 + 3 = \lambda' + 5 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} \lambda = 3\lambda' + 2 \\ 7\lambda' = -7 \\ -4\lambda' = 4 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \lambda' = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \\ z = 4 \end{cases}$$

إذن (D) و (D') يتقاطعان في النقطة $w(0 ; -4 ; 4)$

2- المستوي (P) يشمل (D) و (D') :

وعليه إذا كان $\vec{n}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على شعاعي توجيهي (D) و (D')

حيث: $\vec{u}(1 ; 2 ; -1)$, $\vec{v}(3 ; -1 ; 1)$ هما هاذين الشعاعين.

وعليه : $\vec{n} . \vec{u} = 0$ و $\vec{n} . \vec{v} = 0$

إذن :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

بالجمع نجد : $4\alpha + \beta = 0$

أي: $\beta = -4\alpha$ وعليه: $\alpha - 8\alpha - \gamma = 0$ ومنه : $\gamma = -7\alpha$

بوضع $\alpha = 1$ نجد : $\beta = -4$, $\gamma = -7$

ومنه معادلة المستوي هي من الشكل : $x - 4y - 7z + \delta = 0$

وبما أن w تنتمي إلى هذا المستوي فإن : $0 + 16 - 28 + \delta = 0$

إذن : $\delta = 12$ ومنه معادلة المستوي هي : $x - 4y - 7z + 12 = 0$

التمرين 11

1- نبين أن (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

نحل الجملة : $\begin{cases} \alpha = -\lambda + 1 \ldots (1) \\ \alpha - 1 = 2\lambda \ldots (2) \\ -\alpha = \lambda + 1 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (2) و (3) نجد : $-1 = 3\lambda + 1$ ومنه $\lambda = \frac{-2}{3}$

بالتعويض في كل المعادلات نجد :

$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3} \\ \alpha - 1 = \frac{-4}{3} \\ -\alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$ و هذا تناقض.

ومنه (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

2- نبين أن (D) و (Δ) من مستويين مختلفين :

شعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(-1;2;1)$ وشعاع توجيه (Δ) هو $\vec{v}(1;1;-1)$. الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليس لهما نفس الحامل لأن إحداثياتهم ليست متناسبة وكذلك المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيان

ومنه (D) و (Δ) من مستويين مختلفين.

3- تعيين معادلة (p_α) :

A نقطة من (Δ) فاصلتها α ومنه : $A(\alpha;\alpha-1;-\alpha)$.

لتكن Bنقطة من (D) حيث $B(1;0;1)$.

شعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(-1;2;1)$

بما أن (p_α) يشمل (D) و (A) فإن (p_α) يقبل كمعلم :

$\left(B;\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)$, $\overrightarrow{BA}\ (\alpha - 1; \alpha - 1; -\alpha - 1)$ ومنه من أجل كل نقطة $M(x;y\,z)$

من (p_α) فإن : $\overrightarrow{BM} = \lambda\vec{u} + \mu\overrightarrow{BA}$

وعليه : $\begin{cases} x - 1 = -\lambda + \mu(\alpha - 1) \\ y - 0 = 2\lambda + \mu(\alpha - 1) \\ z - 1 = \lambda - \mu(\alpha + 1) \end{cases} \begin{matrix} \ldots(1) \\ \ldots(2) \\ \ldots(3) \end{matrix}$

بطرح (2) من (1) نجد : $x - 1 - y = - 3\lambda$

ومنه $\lambda = -\frac{1}{3}(x - y - 1)$

بجمع (1) و (3) نجد : $x - 1 + z - 1 = -2\mu$

ومنه $\mu = -\frac{1}{2}(x + z - 2)$ بالتعويض في (1) نجد :

$$x - 1 = \frac{1}{3}(x - y - 1) - \frac{1}{2}(x + z - 2)(\alpha - 1)$$

$$6(x - 1) = 2(x - y - 1) - 3(x + z - 2)(\alpha - 1)$$

$$6x - 6 = 2x - 2y - 2 - 3(\alpha - 1)x - 3(\alpha - 1)z + 6(\alpha - 1)$$

$$4x + (3)(\alpha - 1)x + 2y + 3(\alpha - 1)z + 2 - 6\alpha + 6 - 6 = 0$$

وعليه : $(3\alpha + 1)x + 2y + 3(\alpha - 1)z + 2 - 6\alpha = 0$

وهي معادلة ديكارتية للمستوي (p_α) .

4- تعيين α بحيث يمر (p_α) من المبدأ :

أي $2 - 6\alpha = 0$ وعليه : $\alpha = \frac{1}{3}$

5- يكون (p_α) موازيا لحامل محور الفواصل $(O ; \vec{i})$ إذا كانت معادلته من الشكل : $by + cz + d = 0$

ومنه : $3\alpha + 1 = 0$ وعليه : $\alpha = -\frac{1}{3}$

التمرين 12 .

1) التمثيلات الوسيطية :

$$(AE) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} , \quad (AD) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} , \quad (AB) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2) التمثيل الوسيطي للمستوي (BCG) :

المستوي (BCG) يشمل النقطة $B(1 ; 0 ; 0)$

و الشعاعين $\overrightarrow{BC}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{BF}(0; 0; 1)$

ومنه $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$ معلم لهذا المستوي وعليه من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من

(BCG) : $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BC} + M\overrightarrow{BF}$

إذن التمثيل الوسيطي للمستوي (BCG) هو : $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

3) تعيين نقط تقاطع (P) و (BCG) :

نحل الجملة : $\begin{cases} 2x + 6y - z + 5 = 0 \\ x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

وعليه : $2 + 6y - z + 5 = 0$ وعليه :

$6y - z + 7 = 0$

وهي معادلة مستو يوازي حامل محور الفواصل $(O, \vec{i})$.

التمرين 13 .

نحل الجملة: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \ldots (1) \\ x + 2y - 3z = 0 \ldots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-3y + 4z - 4 = 0$

ومنه : $y = \frac{1}{3}(4z - 4)$ أي $y = \frac{4}{3}z - \frac{4}{3}$

بالتعويض في (1) نجد : $x - \frac{4}{3}z + \frac{4}{3} + z - 4 = 0$

وعليه : $3x - 4z + 4 + 3z - 12 = 0$

إذن : $3x - z - 8 = 0$ وبالتالي : $x = \frac{1}{3}z + 8$

وعليه : $\begin{cases} x=\frac{1}{3}z+8 \\ y=\frac{4}{3}z-\frac{4}{3} \\ z=z \end{cases}$ بوضع $z=t$ نجد : $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t+8 \\ y=\frac{4}{3}t-\frac{4}{3} \\ z=t \end{cases}$

ومنه يتقاطع (P) و (p') وفق المستقيم الذي يشمل النقطة

$I\left(8,\frac{-4}{3},0\right)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};1\right)$

التمرين 14.

1- التمثيل الوسيطي للمستوي (p') :

$\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(0;1;-1)$ وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل ومنه $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي (p')

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (P') فإن : $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

وعليه : $\begin{cases} x-1=-\alpha \\ y-0=\alpha+\beta \\ z-1=-\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=-\alpha+1 \\ y=\alpha+\beta \\ z=-\beta+1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستوي (P').

2- تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

نحل الجملة :
$$\begin{cases} -x+y+z-4=0\ldots(1) \\ x=-\alpha+1\ldots(2) \\ y=\alpha+\beta\ldots(3) \\ z=-\beta+1\ldots(4) \end{cases}$$

نعوض كل من x و y و z من (2) و (3) و (4) بقيمها في (1) فنجد :

$$-(-\alpha+1)+(\alpha+\beta)-\beta+1-4=0$$

إذن : $2\alpha-1+\beta-\beta+1-4=0$ أي: $2\alpha-4=0$

وعليه : $\alpha=2$ ومنه :
$$\begin{cases} x=-2+1 \\ y=2+\beta \\ z=-\beta+1 \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=-\beta+1 \end{cases}$$
أي
$$\begin{cases} x=o\,.\,\beta-1 \\ y=\beta+2 \\ z=-\beta+1 \end{cases}$$

وهي التمثيل الوسيطي لمستقيم (Δ) يشمل النقط $C(-1\,;\,2\,;\,1)$ وشعاع توجيهه

$$\vec{u}(0\,;\,1\,;\,-1)$$

إذن : (P) و (P') يتقاطعان وفق (Δ).