10 – المستقيمات و المستويات في الفضاء

الكفاءات المستهدفة

1- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية أو التلاقي
أو انتماء أربع نقط إلى نفس المستوي.

2- الانتقال من التمثيل الوسيطي إلى المعادلة الديكارتية و العكس.

3- الانتقال من جملة معادلتين لمستقيم إلى التمثيل الوسيطي.

4- تحديد الوضع النسبي لمستويين أو لمستقيمين.

5- تحديد الوضع النسبي لمستقيم و مستو.

6- تعيين تقاطع مستويين، مستقيمين، مستقيم و مستو.

تصميم الدرس

تعريف

أنشطة

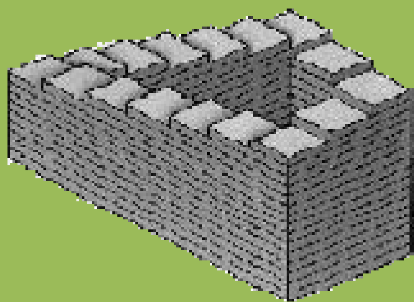
الدرس

تمــاريــن و مشكـــــلات

الحــلــــــــــــول

تعريف:

أنظر جيدا و تخيل نفسك أنك تصعد على هذا السلم ...



هل أنت فعلا تصعد ؟!

أنـــشـــطـــة:

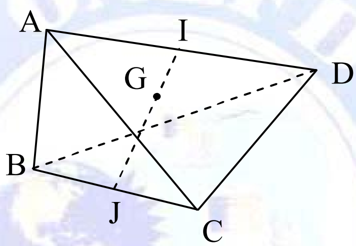
النشاط

ABCD رباعي وجوه . I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$.

G هي مرجع الجملة $\{(A\,;2)\,;(B\,;1)\,;(C\,;1)\,;(D\,;2)\}$ برهن أن النقط J , I , G في استقامية.

الـــــحـــــل

نبرهن أن النقط J , I , G في استقامية.



لدينا : G مرجح الجملة $\{(A\,;2)\,;(B\,;1)\,;(C\,;1)\,;(D\,;2)\}$

وعليه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ إذن :

$$2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\right)+\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$$

لكن I منتصف $[AD]$ وعليه : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

وكذلك J منتصف $(BC]$ وعليه : $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

ومنه : $4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ أي أن : $2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

إذن G هي مرجح الجملة $\{(I\,;2)\,;(J\,;1)\}$

ومنه G نقطة من المستقيم $(I\,J)$

أي أن النقط J , I , G في استقامية.

الــــــــــدرس:

1) مميزات المرجح :

تعريف 1 : (تذكير)

مرجح النقط $A_1, A_2 ,..., A_n$ مرفقة بالمعاملات $\alpha_1 , \alpha_2 ,..., \alpha_n$ حيث:

$\alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n \neq 0$ هي النقطة الوحيدة G التي تحقق:

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} +...+ \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

G تسمى أيضا مركز المسافات المتناسبة للجملة :

$$\{(A_1 , \alpha_1) ; (A_2 , \alpha_2) ; . . . ; (A_n , \alpha_n)\}$$

مثال 1:

إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

ومنهI مرجح الجملة $\{(A , 1) ; (B , 1) \}$

مثال 2:

إذا كان G مركز ثقل المثلث ABC أي $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A , 1) ; (B , 1) ; (C , 1)\}$

ملاحظة :

إذا كان: $\alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n = 0$ فإن الجملة :

$\{(A_1, \alpha_1) , (A_2, \alpha_2) ,..., (A_n, \alpha_n)\}$ لا تقبل مرجحا.

مبرهنة 1:

1) إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A_1, \alpha_1) , (A_2, \alpha_2) ,..., (A_n, \alpha_n)\}$

فإنه من أجل كل نقطة M من المستوي(أو الفضاء) لدينا:

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + . . . + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

2) إذا كان H مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$

وكان K مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$. $(\alpha + \beta \neq 0)$

فإن H مرجح الجملة $\{(K , \alpha + \beta) ; (C , \gamma)\}$

ملاحظة :

إذا كان المستوي منسوب إلى معلم $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$ وكان G مرجح الجملة $\left\{\left(A_1, \alpha_1\right), \left(A_2, \alpha_2\right), ..., \left(A_n, \alpha_n\right)\right\}$ بحيث:

$$A_1\left(x_1; y_1\right), A_2\left(x_2; y_2\right), ..., A_n\left(x_n; y_n\right), G\left(x_G; y_G\right)$$

فحسب المبرهنة (1) ينتج:

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right)\overrightarrow{OG}$$

وهذا بوضع $M = O$ ومنه:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \end{cases}$$

وفي المستوى المركب :

من أجل : $A_n\left(Z_n\right) ; ... ; A_2\left(Z_2\right) ; A_1\left(Z_1\right) ; G\left(Z_G\right)$

لدينا : $$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + ... + \alpha_n Z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

مثال :

في المستوى المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها: $Z_1 = 2 + 3i$, $Z_2 = -4i$, $Z_3 = -3 + i$ على الترتيب.

احسب لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A , 2) ; (B , -1) ; (C , 1)\right\}$.

الحل :

النقطة G تحقق $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

ولدينا: $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2 - 1 + 1}$ ومنه: $Z_G = \dfrac{2Z_1 - Z_2 + Z_3}{2 - 1 + 1}$

إذن: $Z_G = \dfrac{2(2 + 3i) + 4i - 3 + i}{2}$ ومنه: $Z_G = \dfrac{1}{2} + \dfrac{11}{2}i$

مبرهنة 2 :

لتكن A و B نقطتان متمايزتان و α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ عندما تمسح α و β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المستقيم (AB) كاملا.
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ عندما تمسح α و β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وتكون من نفس الإشارة هي القطعة $[AB]$.

ملاحظة :

لكي نبرهن أن ثلاث نقط على استقامية يكفي أن نبرهن أن إحداهما هي مرجح الأخريتين.

مبرهنة 3:

لتكن A,B,C ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و ليست في استقامية و α, β, γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ عندما تمسح α, β, γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي كل المستوى (ABC)
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ عندما تمسح α, β, γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و تكون من نفس الإشارة هي الجزء من المستوي المحدد بالمثلث ABC .

ملاحظة :

لكي نبرهن أن أربعة نقط من نفس المستوى يكفي أن نبرهن أن إحداهن مرجح النقط الأخرى.

2) التمثيل الوسيطي لمستقيم و لمستو:

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

مبرهنة :

(D) مستقيم يشمل النقطة $A\left(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma\right)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$. لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من الفضاء.

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا حققت إحداثيي M

العلاقات التالية : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

البرهان :

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

النقطة $M(x\,;\,y\,;\,z)$ هي نقطة من المستقيم (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

ومنه نحصل على : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ من تساوي إحداثيات شعاعين

تعريف :

الجملة $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ و العدد الحقيقي t هو وسيط.

مثال 1:

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1\ ;\ 3\ ;\ -4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(4\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

الحل :

تكون نقطة $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ من الفضاء نقطة من (D) إذا وفقط

إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

ومنه $\begin{cases} x + 1 = 4t \\ y - 3 = -t \\ z + 4 = 3t \end{cases}$ و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

حيث : t وسيط حقيقي.

مثال 2 :

ماذا تمثل الجملة : $\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 4t - 1 \\ z = \frac{1}{2}t + 5 \end{cases}$

الحل :

هذه الجملة تمثل تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(5\ ;\ -1\ ;\ 5)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1\ ;\ 4\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

ب− التمثيل الوسيطي لمستو:

مبرهنة :

M نقطة من المستوى (P) المزود بمعلم $\left(A\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ بحيث $A\left(\alpha_1\,;\beta\,;\gamma\right)$ و $\vec{u}\left(a\,;b\,;c\right)$ و $\vec{u}\left(a'\,;b'\,;c'\right)$

إذا وفقط إذا كانت إحداثياها $\left(x\,;y\,;z\right)$ تحقق الجملة :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

حيث t و t' حقيقيان.

البرهان :

تكون $M\left(x\,;y\,;z\right)$ نقطة من المستوى (P) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان t و t' بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u'}$

ومن تساوي احداثيات شعاعين نجد :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

تعريف :

نقول أن الجملة $\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$ تشكل تمثيلا وسيطيا للمستوى (p) الذي يشمل النقطة $A\left(\alpha\,;\beta\,;\gamma\right)$ و شعاعي توجيهه $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ و $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$ و t و t' وسيطين حقيقيين.

مثال :

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) المعين بالنقطة A(1 ; -3 ; 4) و بالشعاعين $\vec{u}(2\,;-1\,;5)$ و $\vec{v}(3\,;2\,;1)$

الحل :

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وعليه $(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ معلم للمستوي (P) . تكون النقطة M من الفضاء نقطة من (P) إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها $(x\,;y\,;z)$ الجملة :

$$\begin{cases} x - 1 = 2t + 3t' \\ y + 3 = -t + 2t' \\ z - 4 = 5t + t' \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} x = 2t + 3t' + 1 \\ y = -t + 2t' - 3 \\ z = 5t + t' + 4 \end{cases}$$

و هو يشكل تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) .

3) التمثيل الديكارتي لمستقيم:

مبرهنة :

(P) مستقيم يشمل النقطة $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;b\,;c)$. إذا كانت الأعداد a,b,c غير معدومة جميعا فإن نقطة M من الفضاء تنتمي إلى (D) إذا حققت إحداثياتها ما يلي :

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$$

البرهان :

التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

وعليه : $\begin{cases} x - \alpha = at \\ y - \beta = bt \\ z - \gamma = ct \end{cases}$ ومنه : $\dfrac{x-\alpha}{a} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{z-\gamma}{c} = t$

تعريف :

العبارة $\dfrac{x-\alpha}{a} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{z-\gamma}{c}$ تسمى تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ وهذا إذا كانت الأعداد a و b و c غير معدومة جميعا.

إذا كان أحد الأعداد a,b,c معدوما فإن بسطه يكون معدوما أيضا.

مثال :

اكتب تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3\ ;\ 2\ ;\ 4)$

الحل :

التمثيل الديكارتي للمستقيم (D) هو: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{4}$

4) التقاطع و التوازي في الفضاء لمستويين:

مبرهنة :

نعتبر المستويان (P) و (P') حيث :

$(P) : ax + by + cz + d = 0$ و $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

يتوازى (P) و (P') إذا وفقط إذا وجد عدد حقيق k غير معدوم بحيث :

$c' = kc$ و $b = kb'$ و $a' = ka$

البرهان :

يتوازى (P) و (P') إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{n'}(a';b';c')$ مرتبطان خطيا.

أي إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{n'} = k\vec{n}$.

وعليه : $a' = ka$ و $b' = kb$ و $c' = ka$

مثال 1:

ليكن المستويان: $(P) : 2x - y + 4z - 5 = 0$

و $(P') : 4x - 2y + 8z = 0$ متوازيان لأن شعاعيهما الناظميان $\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 4)$ و $n'(4\ ;\ -2\ ;\ 8)$ مرتبطان خطيا.

مثال2 :

المستويان : $(P) : x - y + 3z + 4 = 0$

و $(P') : 3x + y - 4z + 2 = 0$

غير متوازيان لأن الشعاعين $\vec{n}(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$ و $\vec{n}'(3\ ;\ 1\ ;\ -4)$ غير مرتبطان خطيا.

ملاحظة :

المستقيم في الفضاء ليس له معادلة ديكارتية بل له تمثيل ديكارتي كما سبق.