7 – الموافقات في $\mathbb{Z}$.(*)

الكفاءات المستهدفة

1- معرفة استعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

2- نشر عدد طبيعي وفق أساس.

3- الانتقال من نظام تعداد أساسه α إلى نظام تعداد أساسه β .

تصميم الدرس

تعريف

أنشطة

الدرس

تمـــاريـــن و مشكــــــلات

الحــلــــــــــــــول

تعريف:

ابن البناء المراكشي:أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف **بأبي العباس بن البناء المراكشي** (721-654هـ/1321-1256 م) هو عالم مراكشي متفنن في علوم جمة، برز بصفة خاصة في الرياضيات، والفلك، والتنجيم، والعلوم الخفية، وكذلك في الطب. قضى أغلب فترات حياته في مسقط رأسه في مراكش، ولذا نسب إليها، وبها درس النحو والحديث والفقه، ثم ذهب إلى فاس و درس الطب والفلك والرياضيات. حظي ابن البناء بتقدير ملوك الدولة المرينية في المغرب الذين استقدموه إلى فاس مراراً. وتوفي في مدينة مراكش عام 721هـ/1321م.

إسهاماته العلمية: من إسهامات ابن البناء في الحساب أنه أوضح النظريات الصعبة والقواعد المستعصية، وقام ببحوث مستفيضة عن الكسور، ووضع قواعد لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وقاعدة الخطأين لحل معادلات الدرجة الأولى، كما عُدِّ من أهم الذين استعملوا الأرقام الهندية في صورتها المستعملة عند المغاربة.

مؤلفاته: ألف ابن البناء أكثر من سبعين كتاباً في الحساب، والهندسة، والجبر، والفلك، والتنجيم، ضاع أغلبها ولم يبق إلا القليل منها، وأشهرها : "كتاب الجبر والمقابلة" ؛"كتاب الفصول في الفرائض" ؛ "رسالة في المساحات" ؛ "كتاب الأسطرلاب واستعماله" .

أنشطة:

النشاط1

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 2$ و x عدد طبيعي حيث باقي قسمة x على n هو 1 (x غير معدوم). برهن بالتراجع أن باقي قسمة x^p على n هو 1 من أجل $p \geq 0$. استنتج باقي قسمة $(2009)^{2010}$ على 2 .

الحـــــــــل

بما أن باقي قسمة x على n هو 1 فإن: $x-1$ مضاعف n أي يوجد عدد طبيعي k بحيث: $x-1=kn$ و منه : $x=kn+1$

لنبرهن بالتراجع على صحة الخاصية :

باقي قسمة x^p على n هو 1 :

- بداية التراجع : من أجل $p=0$: $x^0=1$ و منه باقي قسمة x^0 على n هو 1 .
- نبرهن الخاصية الوراثية:

نفرض أن باقي قسمة x^p على n هو 1

و نبرهن أن باقي قسمة x^{p+1} على n هو 1

بما أن باقي قسمة x^p على n هو 1 فإن: x^p-1 مضاعف n

و عليه يوجد عدد طبيعي q_1 بحيث: $x^p-1=q_1n$

و منه: $x^p=q_1n+1$ لكن: $x^{p+1}=x^p.x$

إذن: $x^{p+1}=(q_1n+1).(kn+1)$

و منه: $x^{p+1}=q_1kn^2+q_1n+kn+1$

إذن: $x^{p+1}-1=\left(q_1kn+q_1+k\right)n$

و منه : $x^{p+1}-1$ مضاعف n .

و عليه باقي قسمة x^{p+1} على n هو 1 .

– استنتاج باقي قسمة $\left(2009\right)^{2010}$ على 2 :

لدينا باقي قسمة 2009 على 2 هو 1

و عليه مما سبق باقي قسمة $\left(2009\right)^{2010}$ على 2 هو 1.

الـــــــــدرس:

I) الموافقات:

1– تعريف :

x و y عددان صحيحان، n عدد طبيعي و يختلف عن 1.

نقول إن x و y متوافقات بترديد n إذا و فقط إذا كان n يقسم $x-y$

(أي $x-y$ مضاعف n). اصطلاحا نكتب : $x\equiv y\left[n\right]$

و نقرأ x توافق y بترديد n.

أمثلة :

1) $7\equiv4\left[3\right]$ لأن: $7-4=3$ و هو مضاعف 3.

2) $7\equiv1\left[3\right]$ لأن: $7-1=6$ و هو مضاعف 3.

3) $10\equiv10\left[8\right]$ لأن: $10-10=0$ وهو مضاعف 8 .

4) $\left(-39\right)\equiv-5\left[2\right]$ لأن: $-39-\left(-5\right)=-34$ و هو مضاعف 2.

2– خواص :

n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1

1) من أجل كل عدد صحيح x فإن : $x\equiv x\left[n\right]$

و هذا واضح لكون $x-x=0$ ، 0 مضاعف n

2) من أجل كل عددان صحيحان x و y :

إذا كان : $x\equiv y[n]$ فإن : $y\equiv x[n]$

البرهان :

بما أن : $x\equiv y[n]$ فإن : $x-y$ مضاعف n و منه يوجد عدد صحيح k بحيث : $x-y=kn$ و عليه : $y-x=(-k)n$

و بالتالي : $y-x$ مضاعف n إذن: $y\equiv x[n]$

3) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: x,y,z فإن :

إذا كان : $x\equiv y[n]$ و $y\equiv z[n]$ فإن : $x\equiv z[n]$

البرهان :

بما أن $x\equiv y[n]$ و $y\equiv z[n]$ فإن : $x-y$ و $y-z$ مضاعفات للعدد n و عليه يوجد عددان صحيحان p و q بحيث : $x-y=pn$ و $y-z=qn$ و بالجمع نجد : $x-z=(p+q)n$ و عليه : $x-z$ مضاعف n إذن : $x\equiv z[n]$

4) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: a,b,x,y فإن :

إذا كان: $x\equiv y[n]$ و $a\equiv b[n]$ فإن: $x+a\equiv y+b[n]$.

5) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة : a,x,y

إذا كان: $x\equiv y[n]$ فإن: $x+a\equiv y+a[n]$.

البرهان :

لدينا : $x\equiv y[n]$ و $a\equiv a[n]$ من الخاصية 1

و حسب الخاصية 4 فإن: $x+a\equiv y+a[n]$.

6) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: a,b,x,y

إذا كان: $x\equiv y[n]$ و $a\equiv b[n]$ فإن: $a.x\equiv by[n]$

البرهان :

بما أن: $x\equiv y[n]$ و $a\equiv b[n]$ فإنه يوجد عددان صحيحان p و q بحيث: $x-y=p.n$ و $a-b=qn$

و لدينا : $ax-by=ax-bx+bx-by$

و منه: $ax-by=(a-b)x+(x-y)b$

$$=qnx+pnb$$

$$=(qx+pb)n$$

و عليه: $ax-by$ مضاعف n إذن: $ax\equiv by[n]$.

7) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة : a, x, y :

إذا كان : $x\equiv y[n]$ فإن : $ax\equiv ay[n]$

البرهان :

لدينا : $x\equiv y[n]$ و $a\equiv a[n]$ حسب الخاصية (1) .

و عليه : حسب الخاصية 7 فإن $ax\equiv ay[n]$

8) من أجل كل عددان صحيحين x و y و من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم λ . إذا كان: $x\equiv y[n]$ فإن: $\lambda x\equiv \lambda y[\lambda n]$.

البرهان :

لدينا: $x\equiv y[n]$ و منه يوجد عدد صحيح p حيث: $x-y=pn$

و عليه : $\lambda(x-y)=\lambda pn$ أي : $\lambda x-\lambda y=p(\lambda n)$

و منه : $\lambda x-\lambda y$ مضاعف للعدد λn و بالتالي : $\lambda x\equiv \lambda y[\lambda n]$

9) من أجل كل عددين صحيحين x و y و من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم p . إذا كان: $x\equiv y[n]$ فإن: $x^p\equiv y^p[n]$.

البرهان :

- من أجل $p=1$: إذا كان $x\equiv y[n]$ فإن : $x^1\equiv y^1[n]$ و هذا صحيح و عليه بداية التراجع صحيحة .
- نفرض صحة الخاصية من أجل k و نبرهن صحتها من أجل $k+1$ أي نفرض أنه: إذا كان: $x\equiv y[n]$ فإن: $x^k\equiv y^k[n]$

و نبرهن أنه : إذا كان $x\equiv y[n]$ فإن : $x^{k+1}\equiv y^{k+1}[n]$

إذا كان $x\equiv y[n]$ فإن : $x^k\equiv y^k[n]$ صحيحة .

و حسب الخاصية 6 : $x^k.x \equiv y^k.y[n]$

و عليه : $x^{k+1} \equiv y^{k+1}[n]$ إذن الخاصية وراثية.

و منه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p

10) r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n يكافئ $a \equiv r[n]$

البرهان :

- إذا كان $x < n$: باقي قسمة x على n هو x

و عليه $x \equiv x[n]$ (صحيح حسب الخاصية 1)

- إذا كان $x \geq n$: بإجراء عملية القسمة الإقليدية للعدد x على n

نجد: $\begin{cases} x = nq + r \\ 0 \leq r < n \end{cases}$ و عليه: $x - r = nq$ و منه: $x \equiv r[n]$

11) لدينا: $a \equiv 0[n]$ يكافئ a يقبل القسمة n

و هذا بديهي فإن كان $a \equiv 0[n]$ فإن a مضاعف n

و إذا كان a مضاعف n فإن a يقبل القسمة n .

تطبيق 1 :

ما هو باقي قسمة العدد : $(2009)^{2010}$ على 2 :

الحل :

لدينا : $2009 \equiv 1[2]$ و عليه حسب الخاصية (9)

فإن: $(2009)^{2010} \equiv 1^{2010}[2]$ و بالتالي: $(2009)^{2010} \equiv 1[2]$

تطبيق 2 :

1- ادرس بواقي قسمة 2^n على 7 . ثم استنتج باقي قسمة 1962 على 7 .

2- أثبت أن العدد : $12.2^{3n+1} + 2^{12n} + 10$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

الحل :

1- بواقي قسمة 2^n على 7 :

$$2^0 \equiv 1[7] \; ; \; 2^1 \equiv 2[7] \; ; \; 2^2 \equiv 4[7] \; ; \; 2^3 \equiv 1[7]$$

و منه من العلاقة $2^3 \equiv 1[7]$ و حسب الخاصية9 لدينا :

$2^{3p}\equiv 1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي p .

لكن: $2\equiv 2[7]$ و عليه: $2^{3p}.2\equiv 1.2[7]$ إذن: $2^{3p+1}=2[7]$

و كذلك : $2^2\equiv 4[7]$ و عليه : $2^{3p}.2^2\equiv 1.4[7]$

إذن : $2^{3p+2}\equiv 4[7]$

و بالتالي لما : $n=3p$: $2^n\equiv 1[7]$

و لما : $n=3p+1$: $2^n\equiv 2[7]$

و لما : $n=3p+2$: $2^n\equiv 4[7]$

- استنتاج باقي قسمة 2^{1962} على 7 :

لدينا : $1962=3\times 654$ و منه : $1962=3p$

و منه : $2^{1962}\equiv 1[7]$

2- إثبات أن : $12.2^{3n+1}+10.2^{12n}+8\equiv 0[7]$

لدينا: $12\equiv 5[7]$ و $2^{3n+1}\equiv 2[7]$

و عليه: $12.2^{3n+1}\equiv 2\times 5[7]$

إذن : $12.2^{3n+1}\equiv 3[7]$ ...(1) لأن : $10\equiv 3[7]$

و لدينا : $2^{12n}=\left(2^{3n}\right)^4$ و عليه وبما أن : $2^{3n}\equiv 1[7]$

فإن: $\left(2^{3n}\right)^4\equiv (1)^4[7]$ أي: $2^{12n}\equiv 1[7]$ ...(2)

و عليه من (1) و (2) نجد: $12.2^{3n+1}+2^{12n}+10\equiv 4+10[7]$

إذن : $12.2^{3n+1}+2^{12n}+10\equiv 0[7]$.

II) التعداد:

1 – نشر عدد طبيعي وفق أساس :

مبرهنة :

x عدد طبيعي حيث $x \geq 2$. كل عدد طبيعي غير معدوم n يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $n = a_p x^p + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ حيث: $a_0, a_1, ..., a_p$ أعداد طبيعية و كل منها أصغر تماما من x $\left(a_p \neq 0\right)$

مثال 1 :

العدد 1954 المكتوب في النظام العشري يمكن أن يكتب :

$$1954 = 1.10^3 + 9.10^2 + 5.10^1 + 4$$

$$1954 = 4 + 5.10^1 + 9.10^2 + 1.10^3$$ و عليه : $x = 10$.

مثال 2 :

اكتب العدد 47 في نظام التعداد الذي أساسه 2 :

الحل :

لدينا: $47 = 23 \times 2 + 1$

$$23 = 11 \times 2 + 1$$
$$11 = 5 \times 2 + 1$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$
$$1 = 0 \times 2 + 1$$

و منه العدد 47 يكتب في النظام الثنائي هكذا $\overline{101111}^2$

و يقرأ واحد صفر واحد واحد واحد واحد.

مثال3 :

اكتب العدد 2007 في نظام التعداد الذي أساسه 8

الحل :

$$2007 = 250\times 8 + 7$$
$$250 = 31\times 8 + 2$$
$$31 = 3\times 8 + 7$$
$$3 = 0\times 8 + 3$$

و عليه العدد 2007 يكتب في النظام الذي أساسه 8

على الشكل : $\overline{3727}^{8}$

2 – كتابة عدد في نظام تعداد أساسه x :

x عدد طبيعي حيث : $x \geq 2$ و n عدد طبيعي .

– إذا كان $n < x$ فإن n يكتب على الشكل : $n = a_0$.

في نظام التعداد الذي أساسه x :

– إذا كان $n = x$ فإن: $n = 1.x + 0$

و نكتب : $n = \overline{10}$ في نظام التعداد الذي أساسه x .

– إذا كان $n > x$ فإن n ينشر وفق الأساس x كما يلي :

$$n = a_p x^p + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث يكتب اختصارا : $n = \overline{a_p a_{p-1} \ ... \ a_1 a_0}^{x}$

وهي الكتابة المختصرة للعدد n في نظام التعداد الذي أساسه x .

الأعداد الطبيعية الأصغر تماما من x تمثل كل واحدة برمز خاص به.

وعدد هذه الرموز هو x و تسمى أساس نظام التعداد ذو الأساس x .

ملاحظة :

إذا كان n مكتوب في النظام الذي أساسه 10 على الشكل :

$$n = a_p 10^p + ... + + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

فإن n يكتب على الشكل : $n = a_p a_{p-1} \ ... \ a_1 a_0$

بدلا من $n = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1 a_0}^{10}$ و ذلك لكثرة الاستعمال .

3- الانتقال من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري :

مثال :

نعتبر العدد n المكتوب في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $n=\overline{2002012}^{3}$. اكتب n في النظام العشري .

الحل :

$$n=2.3^6+0.3^5+0.3^4+2.3^3+0.3^2+1.3^1+2.3^0$$
$$n=1458+0+0+54+0+3+2=1517$$

4 – الانتقال من نظام تعداد أساسه α إلى نظام تعداد أساسه β :

نعلم أن نظام التعداد الذي أساسه 10 سهل الاستعمال و العمليات الحسابية فيه سهلة و لهذا إذا كان n عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس α و نريد أن نكتب n في نظام تعداد أساسه β فنقوم بما يلي :

- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس 10 (كما سبق)
- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس β

مثال :

عدد n مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس 2

كما يلي : $\overline{11101101}^{2}$. اكتب n في نظام التعداد ذو الأساس 5.

الحل :

- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس 10 :

$$n=1.2^7+1.2^6+1.2^5+0.2^4+1.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0$$
$$n=128+64+32+0+8+4+0+1=237$$

- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس 5 :

$$237=47\times5+2$$
$$47=9\times5+2$$
$$9=1\times5+4$$
$$1=0\times5+1$$

و منه n يكتب : $\overline{1422}^{5}$

ملاحظات :

- النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر و أساسه عشرة، أما أرقامه فهي : 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 .
- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات و أرقامه هي 0،1.
- النظام ذو الأساس 8، أرقامه : 0،1،2،3،4،5،6،7
- النظام ذو الأساس 11، أرقامه : 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 ، α حيث : $\alpha = 10$.
- النظام ذو الأساس 12 ، أرقامه: 9،8،0،1،2،3،4،5،6،7، α ، β حيث : $\alpha = 10$ و $\beta = 11$.

مثال :

اكتب العدد 1954 في نظام التعداد ذو الأساس 12.

الحل :
$$1954 = 162 \times 12 + 10$$
$$162 = 13 \times 12 + 6$$
$$13 = 1 \times 12 + 1$$
$$1 = 0 \times 12 + 1$$

وعليه العدد 1954 يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 12 هكذا :

$\overline{116\alpha}^{12}$ حيث : $\alpha = 10$

5- قابلية القسمة :

n عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 10 :

$$n = a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

إذن : $n = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0$

- قابلية القسمة على 2 : لدينا $10^p \equiv 0[2]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p وعليه : $n \equiv a_0 [2]$

وبالتالي : $n \equiv 0[2]$ تكافئ : $a_0 \equiv 0[2]$

ومنه : $a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$

- قابلية القسمة على 5 : لدينا $10^p \equiv 0[5]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p وعليه : $n \equiv a_0[5]$

وبالتالي : $n \equiv 0[5]$ تكافئ : $a_0 \equiv 0[5]$ و منه : $a_0 \in \{0;5\}$

- قابلية القسمة على 4 : لدينا $10^p \equiv 0[4]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p حيث : $p \geq 2$ و عليه : $n \equiv a_0 + a_1.10[4]$

و بالتالي $n \equiv 0[4]$ تكافئ : $\overline{a_1 a_0} \equiv 0[4]$

أي العدد المكون من رقم الآحاد و العشرات مضاعف للعدد 4 .

- قابلية القسمة على 25 : لدينا $10^p \equiv 0[25]$ من أجل كل عدد طبيعي p حيث: $p \geq 2$ و عليه: $n \equiv a_0 + a_1.10[25]$

وبالتالي $n \equiv 0[25]$ تكافئ : $\overline{a_1 a_0} \equiv 0[25]$

أي العدد المكون من رقم الآحاد و العشرات مضاعف للعدد 25 .

- قابلية القسمة على 3 : لدينا $10^p \equiv 1[3]$ من أجل كل عدد p حيث : $p \geq 1$ و عليه : $N \equiv 0[3]$

تكافئ : $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \equiv 0[3]$

- قابلية القسمة على 9 : لدينا $10^p \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد p حيث : $p \geq 1$ و عليه : $n \equiv 0[9]$

تكافئ : $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \equiv 0[9]$

- قابلية القسمة على 11 : لدينا $10^p \equiv -1[11]$ إذا كان p فرديا و $n \equiv 1[11]$ إذا كان p زوجيا. و منه : $n \equiv 0[11]$

تكافئ : $\left[a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n\right] \equiv 0[11]$