5 – دوال أسية–دوال القوى
دوال الجذور

الكفاءات المستهدفة

1- حل مشكلات باستعمال الدوال الأسية.

2- معرفة و تفسير نهايات دوال أسية و دوال القوى.

3- حساب مشتقات دوال أسية و دوال القوى و دوال الجذور...

تصميم الدرس

تعريف

أنشطة

الدرس

تمــاريــن و مشكـــــلات

الحــلــــــــــــول

تعريف:

مبدأ باريتو

في سنة 1875 م اكتشف باريتو (اقتصادي ايطالي 1848 – 1923) القانون الذي يحمل اسمه من خلال دراسة توزيع مداخيل العائلات بسويسرا كما أسفرت دراسات مماثلة في دول أخرى على أن توزيع المداخيل يخضع لنفس القانون. عدد العائلات N التي مداخيل كل منها r في مجتمع ما هو دالة متناقصة بدلالة r يعبر عنها بعلاقة من الشكل $N=\frac{k}{r^a}$

حيث a و k ثابتان موجبان مرتبطان بالمجتمع المدروس.

يمكن تطبيق قانون باريتو مثلا على توزيع المؤسسات حسب عدد عمالها أو على توزيع المراكز الهاتفية حسب عدد المنخرطين.

أنشطة:

النشاط1

نعتبر الدالة العددية f التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $f(x)$

حيث : $f(x)=10^x$

1) بين أن $10^x = e^{xLn10}$ حيث e هو العدد النيبيري.

2) احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) عين الدالة المشتقة للدالة f

4) أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة (بعد دراسة الفروع اللانهائية)

في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

الحل

1) لدينا : $10^x = e^{ln10^x}$ (حسب الخاصية $e^{ln\alpha}=\alpha$

و عليه : $10^x = e^{xln10}$ (حسب الخاصية $lnx^n = nlnx$

و منه : $f(x)=e^{xln10}$

2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{xln10}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{xln10}=+\infty$$

3) تعيين الدالة المشتقة :

لدينا: $f(x)=e^{xln10}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب الدالتين

$x\mapsto xln10$ و $x\mapsto e^x$ اللتين تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=(ln10).e^{xln10}=(ln10).10^x$$

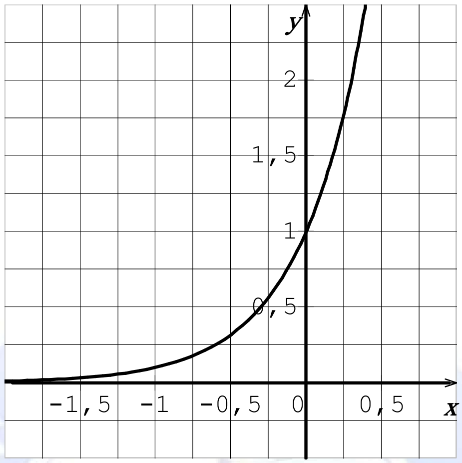
4) التمثيل البياني :

(C) يقبل فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته : $y=0$ عند $-\infty$

ولدينا : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{xLn10}}{x}=\lim_{x\to+\infty} Ln10\times\frac{e^{xLn10}}{xLn10}=+\infty$$

وعليه (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

التمثيل البياني :



النشاط2

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

1- بين أن : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=e^{-x\ln 2}$

2- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3- عين الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R}$.

4- أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (γ) للدالة f

(بعد دراسة الفروع اللانهائية) .

الحـــــــل

1) لدينا $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$ و منه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=e^{x\ln\frac{1}{2}}$

و عليه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=e^{-x\ln 2}$ إذن : $f(x)=e^{-x\ln 2}$

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln 2}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x\ln 2}=+\infty$

2) الدالة المشتقة :

الدالة f هي مركب دالتين $x \mapsto -x\ln 2$ و $x \mapsto e^x$ القابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حيث : $f'(x) = (-\ln 2)\, e^{-x\ln 2}$ و عليه : $f'(x) = (-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^x$

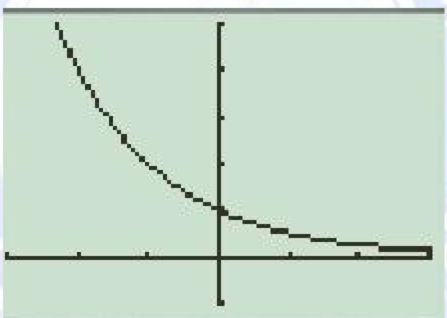
4) – الفروع اللانهائية :

(γ) يقبل فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته $y=0$ عند $+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x\ln 2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\ln 2) \times \frac{e^{-x\ln 2}}{-x\ln 2} = -\infty$

إذن : (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب .

– إنشاء (γ) بآلة بيانية :



الـــــــــدرس:

I – القوى الحقيقية:

1- تعريف :

من أجل a عدد حقيقي موجب تماما و b عدد حقيقي : $a^b = e^{blna}$

2- خواص :

من أجل a و a' من $\mathbb{R}_+^*$ و العددان الحقيقيان b و b' لدينا :

- $a^{b+b'} = a^b.a^{b'}$
- $lna^b = blna$
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{b\times b'}$
- $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$
- $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$
- $\left(a.a'\right)^b = a^b.a'^b$

أمثلة :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} \quad ; \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi+\sqrt{3}}$$

II الدالة الأسية ذات الأساس a : $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

1- تعريف :

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث $a \neq 0$

الدالة $x \mapsto a^x = e^{xlna}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها بالرمز exp_a

2- دراسة الدالة f : $x \mapsto a^x$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

أ) النهايات

* من أجل $a > 1$: $lna > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{xlna} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{xlna} = +\infty$$

* من أجل $0 < a < 1$: $lna < 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{xlna} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{xlna} = 0$$

ب) الدالة المشتقة:

لدينا: $f(x) = e^{xlna}$ إذن الدالة f هي مركب دالتين هما $x \mapsto xlna$ و $x \mapsto e^x$ و هما قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = (lna).e^{xlna}$

- من أجل $a > 1$: $\ln a > 0$ ومنه : $f'(x) > 0$ و عليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- من أجل $0 < a < 1$: $lna > 0$ و منه $f'(x) < 0$ و عليه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

من أجل $a > 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

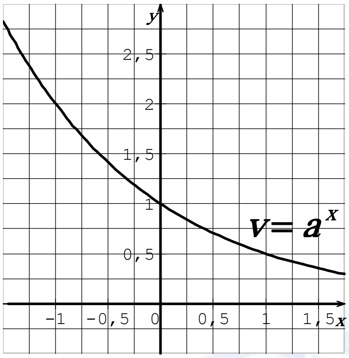
من أجل $0 < a < 1$

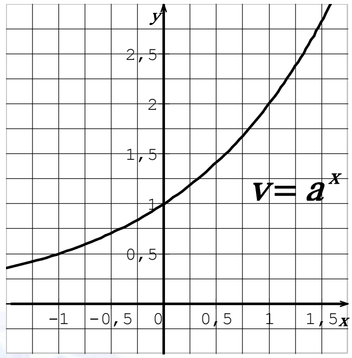
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

ج) التمثيل البياني :

من أجل $a > 1$

من أجل $0 < a < 1$





III- الدالة الجذر من المرتبة n $\left(n\in \mathbb{N}^* -\{1\} \right)$:

1- الجذر من المرتبة n لعدد حقيقي :

• تعريف و ترميز :

من أجل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^* -\{1\}$ و عدد a من $\mathbb{R}_+$ فإن الجذر من المرتبة n للعدد الحقيقي الموجب تماما و الذي يرمز بالرمز $\sqrt[n]{a}$ و المعرفة كما يلي :

إذا كان $a>0$: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0}=0$

• الخواص الجبرية :

b, a عددان حقيقيان موجبان ، b غير معدوم . p, n عددان طبيعيان غير معدومين و كل منهما يختلف عن 1 لدينا الخواص التالية :

• $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ • $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$

• $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$ • $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

• $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$ • $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$

2- الدراسة التحليلية للدالة :

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ، n ثابت و هي معرفة على $[0;+\infty[$

و يمكن تعريفها بالعبارة : $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ كما يمكن تعريفها كما يلي :

من أجل $x \neq 0$: $f(x) = e^{\frac{1}{n}lnx}$ و $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{n}lnx} = +\infty$$

من أجل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{n}lnx}$

و لدينا $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x .

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

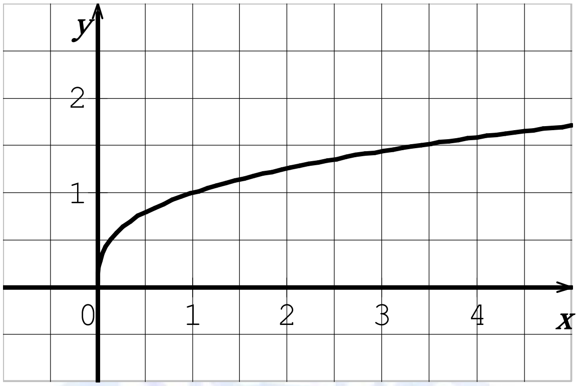
– الفروع اللانهائية : بيان الدالة يقبل فرعا لانهائيا و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}}.x^{-1} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1-n}{n}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1-n}{n}lnx} = 0$$

لأن $\frac{1-n}{n} < 0$ وعليه بيان الدالة يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل عند $+\infty$.

التمثيل البياني :



V) – دوال القوى:

دراسة الدالة f : $x \mapsto x^{\alpha}$ ، α عدد ثابت من $\mathbb{R}^*$

الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ و يمكن كتابة : $x^{\alpha} = e^{\alpha\ lnx}$

– حساب النهايات :

من أجل $\alpha > 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

من أجل $\alpha < 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

– دراسة الاشتقاقية :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة المعرفة

كما يلي : $f'(x) = \alpha.\dfrac{1}{x}e^{\alpha Lnx}$.

من أجل $\alpha > 0$: $f'(x) > 0$ و عليه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

من أجل $\alpha < 0$: $f'(x) < 0$ و عليه f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

– جدول التغيرات :

من أجل $\alpha > 0$ من أجل $\alpha < 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

– الفروع اللانهائية :

التمثيل البياني للدالة f يقبل فرع لانهائي من أجل $\alpha > 0$ و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-1}=\lim_{x\to+\infty}e^{(\alpha-1)\ln x}$$

نلاحظ أنه : من أجل $\alpha > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

و عليه للبيان فرع مكافئ باتجاه محور التراتيب .

من أجل $\alpha < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

إذن بيان الدالة يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل.

من أجل $\alpha = 1$: $f(x)=x$ (بيانها هو المنصف الأول).

أما من أجل $\alpha < 0$ فإن التمثيل البياني للدالة يقبل فرعين لانهائيين

و مستقيمين مقاربين معادلتيهما : $x=0$ و $y=0$.

التمثيل البياني : $\alpha > 0$ $\qquad$ $\alpha < 0$