4 – الدالة اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة

1– حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم.

2– معرفة و تفسير نهايات الدالة اللوغارتمية النيبيرية .

3– إنشاء بيانات دوال لوغاريتمية .

تصميم الدرس

تعريف:

مساحة جلد حيوان

من الغريب التفكير في حساب مساحة جلد حيوان وهو حي ! لكن يصبح الأمر يسيرا إذا علمت أن لمساحة جلده علاقة بوزنه و هو ما اكتشفه كل من كيبلار، برودي و ووستال سنة 1947. إذ أنهم بعد تجارب ودراسات توصلوا إلى الدالة التالية التي تربط المساحة A بالسنتيمتر المربع بالوزن P بالغرام:

$$A = 9,85\,p^{0,64} .$$

1) أدرس تغيرات الدالة $p \mapsto A(p)$.

2) عين $\ln A$ بدلالة $\ln p$ ثم مثّل بيانيا الدالة $\ln p \mapsto \ln A(p)$.

3) ما هي نظريا، مساحة جلد حيوان يزن 750 غراما ؟

أنـــشـــطـــــة:

النشاط1

1- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ التمثيل البياني (c) للدالة f : $x \mapsto e^x$

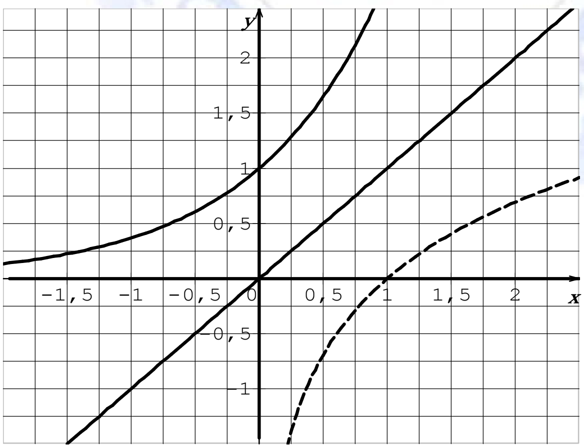
2- أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

3- أنشئ التمثيل البياني (Γ) صورة (c) بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4- لتكن g الدالة التي تمثيلها البياني . (Γ)

- ما هي مجموعة تعريف الدالة . g – ما هي صورة 1 بالدالة . g
- ادرس إشارة الدالة g بيانيا .
- ما هو تخمينك حول : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$
- ما هي صورة العدد e بالدالة g .

الـــــحـــــل



1- إنشاء (c)

2- إنشاء (Δ)

3- إنشاء (r)

4- مجموع الدالة g هي : $]0;+\infty[$

- تعيين صورة 1 :

لدينا $f(0) = 1$ ، نظيرة النقطة $B(0;1)$ بالتناظر المحوري هي النقطة $A(1;0)$ و منه $g(1) = 0$

– دراسة إشارة g بيانيا :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

المخمنات :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

- تعيين صورة e بالدالة g ؛ لدينا : $e^1 = e$ و عليه $f(1) = e$

نظيرة النقطة $c(1; e)$ بالتناظر المحوري هو $D(e;1)$

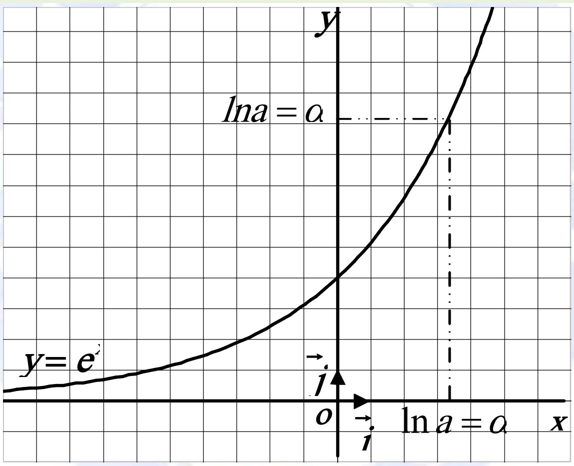
و عليه : $g(e) = 1$.

الــــــــــدرس:

I – الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

1– اللوغاريتم النيبيري لعدد :

الدالة $x \mapsto e^x$ معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$. حسب نظرية القيم المتوسطة من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن للمعادلة $e^x = a$ حل وحيد هذا الحل يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد a و نرمز له بالرمز $\ln a$.



أمثلة :

- حل المعادلة $e^x = 2$ هو $\ln 2$ أي أن : $e^{\ln 2} = 2$
- حل المعادلة $e^x = 10$ هو $\ln 10$ أي أن : $e^{\ln 10} = 10$

نتائج :

أ) لدينا $e^0 = 1$ و عليه : $\ln 1 = 0$

ب) لدينا $e^1 = e$ و عليه : $\ln e = 1$

ج) حل المعادلة $e^x = a$ هو $x = \ln a$ من أجل $a > 0$

و عليه : $e^{\ln a} = a$.

د) لدينا $\ln e^a = a$ من أجل كل عدد حقيقي a

مبرهنة :

من أجل a و b عددان حقيقيان موجبان تماما لدينا: $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

البرهان :

لدينا : $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} . e^{\ln b}$ (و ذلك حسب خواص الدالة الأسية) لكن $e^{\ln a} = a$ و $e^{\ln b}$ و عليه : $e^{\ln a + \ln b} = a.b$

و لدينا أيضا : $e^{\ln(a.b)} = a.b$ و عليه : $e^{\ln(a.b)} = e^{\ln a + \ln b}$

و منه نستنتج أن: $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.

نتائج :

أ) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

البرهان :

بوضع $c = \dfrac{1}{a}$ نجد : $a.c = 1$ و منه : $\ln(a.c) = \ln 1$

و عليه : $\ln a + \ln c = 0$ إذن : $\ln c = -\ln a$

و بالتالي : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

ب) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ حيث a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

البرهان :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a.\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$$

ج) من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد ناطق n

لدينا : $\ln a^n = n\ln a$

البرهان :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد ناطق n : لدينا : $e^{\ln a^n} = a^n$ و

لدينا : $e^{n\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$

و منه : $e^{\ln a^n} = e^{n\ln a}$ و عليه : $\ln a^n = n\ln a$

2- الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

أ) تعريف :

نسمي دالة لوغاريتمية نيبيرية الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ ، والتي ترفق بكل عدد x من المجال $]0;+\infty[$ العدد $\ln x$

أي : $x \mapsto \ln x$

ب) الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية النيبرية :

مبرهنة :

الدالة $\ln$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

البرهان :

لدينا $e^{\ln x} = x$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

لنحسب الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{\ln x}$

الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{\ln x}$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدالة $x \mapsto \ln' x\ .e^{\ln x}$ أي :

$x \mapsto \ln'(x)$

و الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto x$ هي الدالة $x \mapsto 1$ و عليه :

$x\ln'(x)=1$ و منه : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ و منه الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة

$x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

و عليه بما أن : $\ln 1 = 0$ فإن الدالة : $x \mapsto \ln x$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ج) الدالة المشتقة للدالة $h: x \mapsto \ln|g(x)|$

حيث g دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على مجالI.

الدالة $x \mapsto \ln|g(x)|$ هي مركب الدالتان g و $\ln$ حيث g موجبة وتقبل الاشتقاق على I و الدالة $\ln$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+$

و عليه h تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي الدالة $h' : x \mapsto g'(x) \times \frac{1}{g(x)}$

أي : $x \mapsto \frac{g'(x)}{g(x)}$

د) نهايات الدالة اللوغاريتمية :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

البرهان :

نعتبر المجال $[A;+\infty[$ حيث : $10^n \leq A < 10^{n+1}$

حسب تعريف e لدينا : $2 < e < 3$ و عليه : $e^2 < 10$

ومنه : $(e^2)^5 < 10^5$ إذن : $e^{10} < 10^5$ و بالتالي : $\ln e^{10} < \ln 10^5$

أي : $10 < \ln 10^5$ إذا كان : $x \geq (10^5)^{10^n}$ فإن : $\ln x \geq \ln(10)^5$

وعليه : $\ln x \geq 10^n . \ln 10^5$ لكن : $\ln 10^5 > 10$

ومنه : $\ln x \geq 10^{n+1} > A$ إذن : $\ln x > A$

و عليه من أجل $x \in \left[(10^5)^{10};+\infty\right[$ فإن : $\ln x \in [A;+\infty[$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

البرهان :

بوضع : $x=\frac{1}{t}$ نجد : $t=\frac{1}{x}$ لما $\underset{x>0}{x}\to 0$ فإن : $t\to+\infty$

و عليه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\ln t\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

البرهان :

رأينا أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x\geq x$ و عليه

من أجل $x>0$: $\ln e^x\geq\ln x$ أي أن : $x\geq\ln x$

و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما : $\sqrt{x}\geq\ln\sqrt{x}$

إذن : $\sqrt{x}\geq\frac{1}{2}\ln x$ و عليه : $2\sqrt{x}\geq\ln x$ و بالتالي :

$\frac{\ln x}{x}\geq\frac{2\sqrt{x}}{x}$ و عليه : $\frac{\ln x}{x}\geq\frac{2}{\sqrt{x}}$ و بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

فحسب مبرهنة الحد من الأدنى فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln x=0$

البرهان :

بوضع : $x=\frac{1}{t}$ أي : $t=\frac{1}{x}$ فإنه : لما $\underset{x>0}{x}\to 0$ فإن : $t\to+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t}=0$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

البرهان :

نعتبر الدالة $f : t \to \ln t$ ؛ هذه الدالة معرفة و قابلة لاشتقاق على $]0;+\infty[$ و عليه فهي تقبل الاشتقاق عند 1.

من جهة لدينا : $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

أي أن : $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$ ... (1) و من جهة أخرى :

$f'(t) = \frac{1}{t}$ و عليه : $f'(1) = 1$ ... (2) إذن من (1) و (2) ينتج :

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ و بالتالي : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

هـ) جدول تغيرات الدالة : $x \mapsto \ln x$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عددان a و b من $]0;+\infty[$

لدينا : $\ln a = \ln b$ تكافئ $a = b$ ؛ $\ln a > \ln b$ تكافئ $a > b$

$\ln a < \ln b$ تكافئ $a < b$ وعليه :

من أجل $x > 1$: $\ln x > 0$ ؛ من أجل $0 < x < 1$: $\ln x < 0$

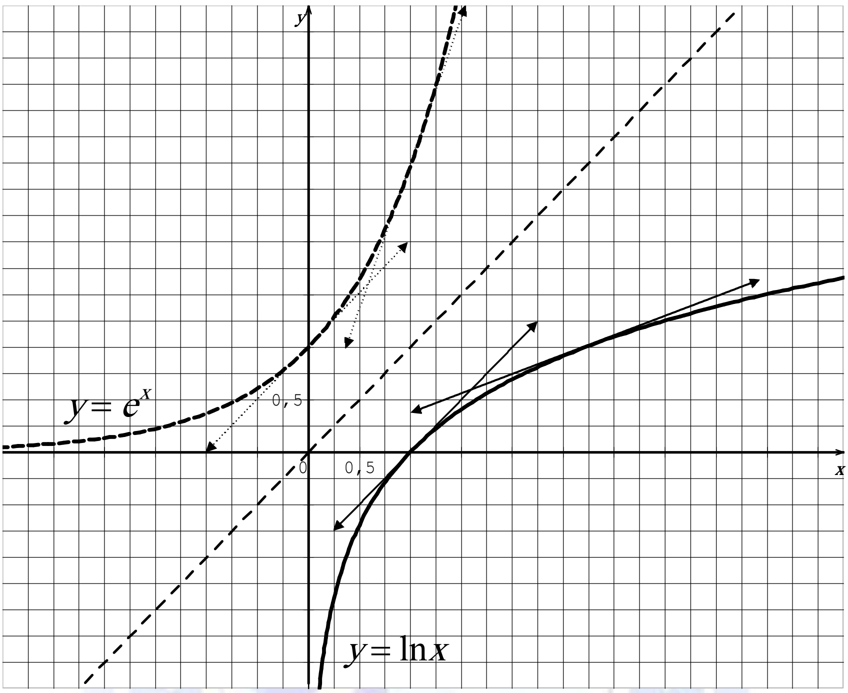
و) التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto \ln x$

معادلتي المماسين لمنحنى الدالة $x \mapsto \ln x$ عند كل من :

$c(1;0)$ و $D(e;1)$ هما :

- عند $c(1;0)$: $y = 1(x-1)+0$ أي : $y = x-1$

- عند $D(e;1)$: $y = \frac{1}{e} \times (x-e)+1$ إذن : $y = \frac{1}{e}x$



ملاحظة :

نلاحظ أن التمثيلين البيانيين لكل من الدالتين: $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto e^x$
متناظرتين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$ و نقول أنهما دالتان عكسيتان.

و) الدوال الأصلية للدوال من الشكل : $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لها نفس الإشارة مع u' في هذا المجال. رأينا أن الدالة المشتقة للدالة: $x \mapsto \ln|u(x)|$ على I هي الدالة: $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ وعليه ينتج أن الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال: $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ حيث : $\lambda \in \mathbb{R}$.

مثال :

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-9}$ على المجال $]3;+\infty[$ وعلى المجال $]-\infty\ ;\ 3[$

وعلى المجال $]-3\ ;\ 3[$ هي الدوال: $x \mapsto \ln\left|x^2-9\right| + \lambda\ :\ \lambda \in \mathbb{R}$

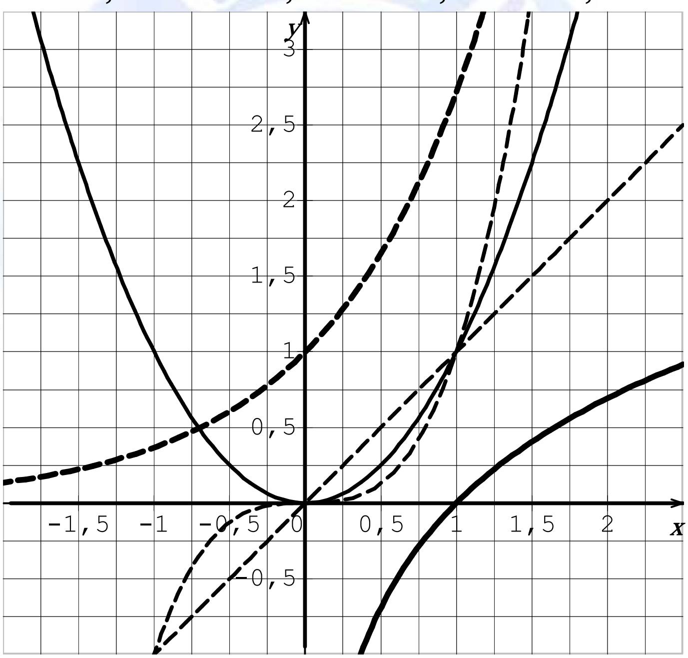
التزايد المقارن :

رأينا فيما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

فإن : $e^x \geq x$ و $x \geq \ln x$ وعليه : $\ln x \leq x \leq e^x$

ننشئ التمثيلات البيانية لكل من الدوال التالية :

$x \mapsto e^x \quad , \quad x \mapsto \ln x \quad , \quad x \mapsto x^3 \quad , \quad x \mapsto x^2 \quad , \quad x \mapsto x$



نلاحظ أن نهاية كل من هذه الدوال هي $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ،

لكن سلوكها مختلف.

ومنه نستنتج التزايد المقارن لها : في اللانهاية تتفوق الدالة الأسية علي الدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم.

– حساب بعض النهايات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0, n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

و من أجل $n\geq 2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty, n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

و من أجل $n\geq 2$: لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$

بوضع : $t=\dfrac{e^x}{x^n}$ فنجد : $\ln t = \ln e^x - \ln x^n$ أي أن : $\ln t = x - n\ln x$ و عليه:

$$\ln t = x\left(1-n\frac{\ln x}{x}\right)$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-n\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

و منه : $\ln t \to +\infty$ و عليه : $t\to+\infty$ أي أنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln x = 0 \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$

و من أجل $n\geq 2$: لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{n-1}.x\ln x = 0$

- $\lim_{x \to -\infty} x^n . e^x = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

بوضع $y = \left| x^n . e^x \right|$ نجد : $\ln y = \ln \left| x^n . e^x \right|$

و عليه : $\ln y = \ln \left| x^n \right| + \ln e^x$ و بالتالي : $\ln y = n \ln \left| x \right| + x$

و عليه : $\ln y = -x \left(n \frac{\ln(-x)}{-x} - 1 \right)$ من أجل $x < 0$

إذن: $\lim_{x \to -\infty} -x \left(n \frac{\ln(-x)}{-x} - 1 \right) = -\infty$ وعليه : $\ln y \to -\infty$

ومنه : $\underset{y>0}{y \to 0}$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} \left| x^n . e^x \right| = 0$ ومنه : $\lim_{x \to -\infty} x^x . e^x = 0$

II – الدالة اللوغاريتمية العشرية:

1- تعريف :

نسمى الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log$

و المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

2- نتائج :

1) $\log 1 = 0$ (2 $\log 10 = 1$

3) الدالة $x \mapsto \log x$ معرفة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

البرهان :

- $\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$ • $\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

لدينا : $\log x = \frac{1}{\ln 10} . \ln x$

وعليه الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto \log x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{\ln 10} . \frac{1}{x}$

وبما أن $x > 0$ و $\ln 10 > 0$ فإن $\frac{1}{\ln 10} . \frac{1}{x} > 0$

ومنه الدالة $x \mapsto \log x$ متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

3- خواص :

من أجل كل عددان حقيقيان a و b من $]0;+\infty[$

ومن أجل كل عدد ناطق r لدينا :

$$\bullet \log(a\times b)=\log a+\log b \qquad \bullet \log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b \qquad \bullet \log a^{r}=r\log a$$

البرهان :

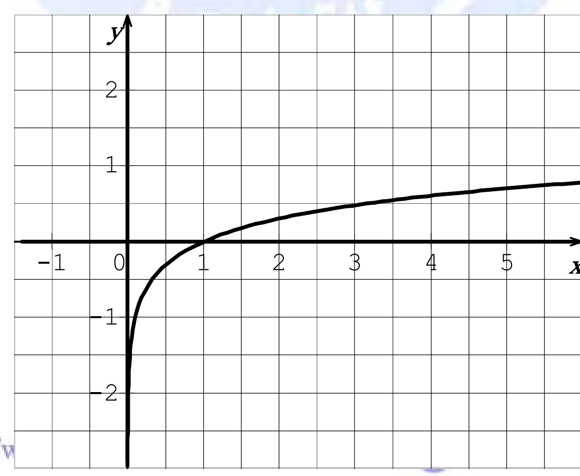
$$\bullet \log(a\times b)=\frac{\ln(a\times b)}{\ln 10}=\frac{\ln a+\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}+\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a+\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln 10}=\frac{-\ln b}{\ln 10}=-\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\log a+\log\frac{1}{b}=\log a-\log b$$

$$\bullet \log a^{r}=\frac{\ln a^{r}}{\ln 10}=r\frac{\ln a}{\ln 10}=r\log a$$

4- التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \log x$:



تكنولوجيا الإعلام و الاتصال:

التطبيق 1:

أنشئ تمثيلا تقريبيا لحل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x}$ مع الشرط $y(1) = 0$.باستعمال طريقة Euler بمجدول Excel في المجال $]0; b]$ والخطوة $h = 0.005$.

الحل :

لدينا: $\Delta y \approx f'(x).\Delta x$ ومنه $f(x+h) - f(x) \approx f'(x).h$ أو $f(x-h) - f(x) \approx -f'(x).h$ مع $h > 0$

$f(x+h) \approx f(x) + f'(x).h$ أو $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$

وبما أن $y' = \frac{1}{\mathrm{x}}$ فإن $f'(x) = \frac{1}{x}$ فنحصل على $f(x-h) \approx f(x) - \frac{h}{x}$

أو $f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$. تتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x \geq 1$ وتعطي العبارة الثانية $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $0 < x \leq 1$ وذلك باعتبار $f(1) = 0$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.

نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل.

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h في الخانة $A3$ مثلا.

من أجل $0 < x \leq 1$: نحجز في الخانة $A4$ قيمة إبتدائية للمتغير وهي1 نحجز في الخانة $A5$ القاعدة $= x-h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي قبل 1 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على قيمة قريبة من 0

فنحجز: $= A4 - A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى غاية الحصول على قيمة قريبة من 0 . نحجز في الخانة $B4$ العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن $f(1) = 0$. نحجز في الخانة $B5$ القيمة التقريبية للعدد $y = f(x-h)$

ولدينا $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$ فنحجز: $= B4 - \$A\$3 / A4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A .

من أجل $x \geq 1$: نحجز في الخانة $C4$ قيمة ابتدائية للمتغير وهي 1

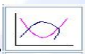
نحجز في الخانة $C5$ القاعدة $=x+h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي بعد 1 بإضافة الخطوة في كل مرة فنحجز : $= C4 + A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية آخر قيمة للمتغير من العمود B .

نحجز في الخانة $D4$ العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن $f(1) = 0$

نحجز في الخانة $D5$ القيمة التقريبية للعدد $y = f(x+h)$ ولدينا $f(x+h) \approx f(x) + f'(x).h$ فنحجز $= D4 + \$A\$3 / C4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B .

التمثيل البياني:

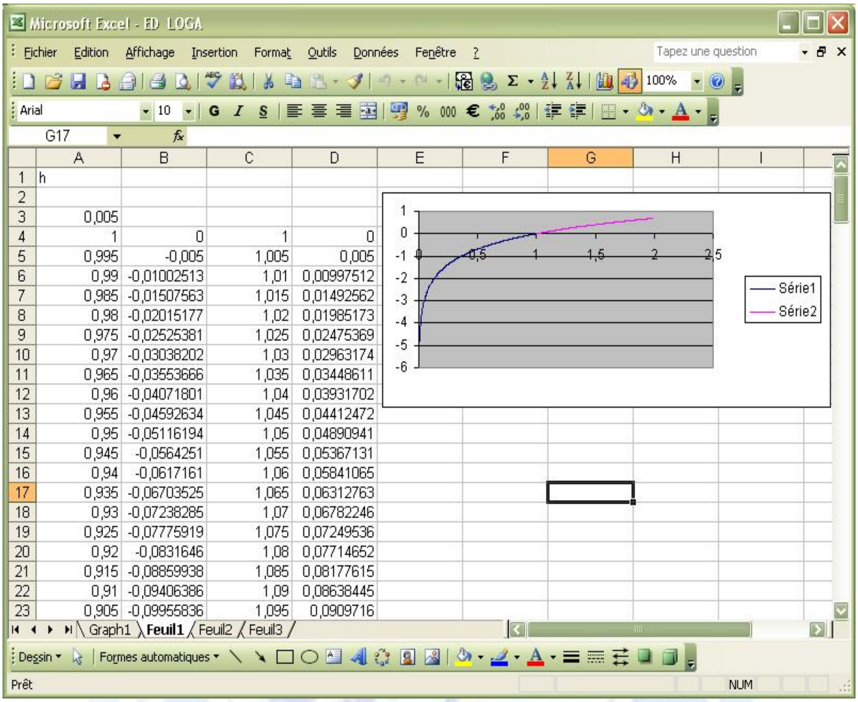
نختار العمودين A و B نضغط على المساعد البياني 

ونختار Nuages de points ثم المنحنى من النوع ، نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $[0;1]$ محجوزة باسم Série1. ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[1;b[$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $C4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $D4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين، حيث يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $]0;b]$ ، ثم الإنهاء Terminer .



	A	B	C	D
1	h			
2				
3	0,005			
4	1	0	1	0
5	0,995	-0,005	1,005	0,005
6	0,99	-0,01002513	1,01	0,00997512
7	0,985	-0,01507563	1,015	0,01492562
8	0,98	-0,02015177	1,02	0,01985173
9	0,975	-0,02525381	1,025	0,02475369
10	0,97	-0,03038202	1,03	0,02963174
11	0,965	-0,03553666	1,035	0,03448611
12	0,96	-0,04071801	1,04	0,03931702
13	0,955	-0,04592634	1,045	0,04412472
14	0,95	-0,05116194	1,05	0,04890941
15	0,945	-0,0564251	1,055	0,05367131
16	0,94	-0,0617161	1,06	0,05841065
17	0,935	-0,06703525	1,065	0,06312763
18	0,93	-0,07238285	1,07	0,06782246
19	0,925	-0,07775919	1,075	0,07249536
20	0,92	-0,0831646	1,08	0,07714652
21	0,915	-0,08859938	1,085	0,08177615
22	0,91	-0,09406386	1,09	0,08638445
23	0,905	-0,09955836	1,095	0,0909716